

Programme de colles - Semaine 13 - du 15/01 au 19/01

Intégration sur un intervalle quelconque et interversions : Cours et exercices.

Intégrale à paramètres : Cours et exercices.

Continuité d'une intégrale à paramètre : Soit A une partie d'un espace normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que f est continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde variable. On suppose de plus qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de A , $|f(x, \cdot)| \leq \varphi$. Alors

$$g : x \mapsto \int_I f(x, t) \, dt$$

est définie et continue sur A . Extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite au voisinage d'un point a de A . Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite sur tout segment de A .

Dérivation d'une intégrale à paramètre : Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que f est continue par morceaux par rapport à la seconde variable, que, pour tout x de J , $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I , que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $J \times I$, continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde variable. On suppose de plus qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de J , $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot) \right| \leq \varphi$. Alors

$$g : x \mapsto \int_I f(x, t) \, dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et vérifie :

$$\forall x \in J, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \, dt.$$

Extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite sur tout segment de J .

Classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse d'intégrabilité de $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, \cdot)$ pour tout x de J si $0 \leq j \leq k-1$ et domination sur tout segment de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, \cdot)$.

Étude de la régularité et étude asymptotique de fonctions définies par des intégrales.

Séries entières : L'essentiel du cours a été vu mais en début de semaine, en dehors des exemples du cours, aucun exercice n'aura été corrigé. Il est donc préférable de ne poser que des applications de cours cette semaine. Les séries entières seront de nouveau au programme la semaine prochaine.

Définition (les coefficients des séries entières considérées sont réels ou complexes). Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Définition du rayon de convergence d'une série entière. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la série converge absolument ; pour tout z tel que $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Disque ouvert de convergence ; intervalle ouvert de convergence. Si $a_n = O(b_n)$, $R_a \geq R_b$. Si $a_n \sim b_n$, $R_a = R_b$. Utilisation de la règle de d'Alembert.

Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Propriétés de la somme : La convergence est normale sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon r strictement inférieur à R . Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence.

Série entière d'une variable réelle : Primitivation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence ; intégrale sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.

La somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par

dérivation terme à terme. Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme. Si les fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un voisinage de 0, alors pour tout n , $a_n = b_n$.

Fonctions développables en série entière : Définition. Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$. Développement de $\frac{1}{1-z}$ sur $\mathbb{D}(0, 1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Fonction développable en série entière sur un intervalle $] -r, r[$ de $\mathbb{R}$. Une telle fonction est alors de classe C^∞ et le développement est unique ; il s'agit de la série de Taylor de la fonction. Développements en série entière des fonctions exponentielles, hyperboliques, circulaires, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto \ln(1-x)$, arctan et $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Solutions développables en série entière d'une équation différentielle linéaire.

Une belle et heureuse année 2024 !!