MP*2 LLG
2023/2024

Feuille d'exercices : Suites et séries de fonctions

Convergence de suites de fonctions

Exercice 1 *(CCINP)* On choisit $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$; étudier la convergence simple de (f_n), sa convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, $a > 0$ et sur $]0, +\infty[$.

Exercice 2 *(CCINP)* On considère la suite de fonctions $f_n : x \mapsto \cos\left(\dfrac{nx}{n+1}\right)$.

1. Étudier la convergence simple de la suite sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence uniforme des f_n sur tout segment $[-a, a]$.
3. Montrer que la suite ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 *(IMT)*

1. Convergences simple et uniforme de la suite de fonctions $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+n^2x^2}$ sur $[0, 1]$.
2. Convergence uniforme de cette suite sur $[a, 1]$ avec $0 < a \leqslant 1$.

Exercice 4 *(IMT)* On pose $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{2^n x}{1+n2^nx^2} \end{cases}$

1. Étude de la convergence simple de la suite $(f_n)_n$.
2. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\ \mathrm{d}t$. Calculer I_n.
3. Quelle la limite de la suite (I_n) ? La suite (f_n) converge-t-elle uniformément ?
4. Soit $a > 0$. La suite $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?

Exercice 5 *(Saint-Cyr)* Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, \pi/2]$, soient $f_n(x) = \cos^n(x)\sin(x)$, $g_n(x) = nf_n(x)$.

1. Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Même question avec $(g_n)_{n\geqslant 0}$.
3. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} g_n$. Quelle est la limite de $(I_n)_{n\geqslant 0}$?

Exercice 6 *(Mines)* Une fonction réelle $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ vérifie $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $f_n : x \mapsto f(nx)$.

Exercice 7 *(Mines)* Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions

$$f_n : x \mapsto n\left(\arctan\left(x + \frac{1}{n}\right) - \arctan\left(x - \frac{1}{n}\right)\right).$$

Exercice 8 *(Centrale-X)**
Soit E l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|.\|_\infty$. Pour $f \in E$, soit $T(f)$ la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$\forall x \in]0, 1], \quad T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f \quad \text{et} \quad T(f)(0) = f(0).$$

1. Montrer que T est un endomorphisme continu de E et calculer sa norme d'opérateur.
2. Soit $f \in E$ nulle au voisinage de 0. Montrer que la suite $(T^n f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.
3. Soit $f \in E$ quelconque. Étudier la convergence uniforme de $(T^k(f))_{k\in\mathbb{N}}$.

Exercice 9 *(X)* On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on pose $L(f) : x \in [0, 1] \mapsto \displaystyle\int_0^x f$. Montrer que pour tout $f \in E$ la suite $(L^n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.

Exercice 10 *(Mines)* On définit une suite de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par récurrence par :

$$\begin{cases} P_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \dfrac{1}{2}(x - P_n^2(x)) \end{cases}$$

1. Montrer que cette suite est croissante et converge simplement vers $x \mapsto \sqrt{x}$.
2. Puis montrer que pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \leqslant (\sqrt{x} - P_n(x)) \left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)$.
3. En déduire la convergence uniforme sur $[0,1]$
4. En déduire l'existence d'une suite de polynômes qui tend uniformément vers $x \mapsto |x|$ sur $[-1,1]$.

Exercice 11 * *(Mines)* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$.

1. Montrer que la suite converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la suite est croissante.
3. Montrer que la suite converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 12 *(Centrale)*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions h_n par $h_0(x) = 1$ et $h_{n+1}(x) = h_n\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{x}{2}\left(h_n\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2$.

1. Montrer que la suite h_n converge uniformément sur $[0,1]$. *Pour $x \in [0,1]$, on pourra utiliser que la fonction T_x, définie par $T_x(y) = y - \dfrac{xy^2}{2}$, est 1-lipschitzienne sur $[0,1]$ et que $T_x([0,1]) \subset [0,1]$.*
2. On étudie l'équation fonctionnelle $(E) : f(2x) = 2f(x) - 2f(x)^2$. Pour h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on pose $f(x) = xh(x)$. À quelle condition sur h, f est-elle solution de (E) ?
3. Montrer que (E) admet une solution continue non constante sur $[0,1]$.
4. Puis montrer que (E) admet une solution continue non constante sur $\mathbb{R}_+$.
5. Quelles sont les solutions constantes sur $\mathbb{R}$?

Convergence de séries de fonctions

Exercice 13 *(CCINP)* Étudier la convergence simple, normale et uniforme de $\sum nx^2\, \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 14 *(CCINP)* Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit sur $\mathbb{R}_+$ pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n\, \mathrm{e}^{-x}}{n!}$. Étudier le mode de convergence de la suite de fonctions (f_n), puis de la série de $\sum f_n$.

Exercice 15 *(CCINP)*

1. Convergences simple et uniforme de la suite de fonctions $f_n(x) = \cos^n x \sin x$ sur $[0,\pi]$.
2. Convergences simple, uniforme et normale de $\sum f_n(x)$.

Exercice 16 *(CCINP)* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n(x) = \dfrac{\ln(1+n^2x^2)}{n^3}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$, qu'elle y est de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'elle est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ (on pourra mener l'étude sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$).

Exercice 17 *(Centrale)*

1. Étudier le domaine de définition, la continuité et la dérivabilité (sur $\mathbb{R}_+^*$) de fonction suivante $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx^2}}{n^\alpha}$.
2. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Donner une équation différentielle vérifiée par f.

Exercice 18 *(CCINP)* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \mapsto \dfrac{2x}{n^2+x^2}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note f la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pi$. *Ind.* On pourra considérer $t \mapsto \dfrac{2x}{t^2+x^2}$.

Exercice 19 *(CCINP)* Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+n^2x}$. On note f la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. Donner un équivalent de f en 0.

Exercice 20 *(IMT)* Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2x+n}$.

1. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
2. Sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, en déduire un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 21 *(CCINP)* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n(x) = \dfrac{1}{(n+x)^{\frac{3}{2}} + (n+x)^{\frac{1}{2}}}$. On note f la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

1. Montrer que f est bien définie sur $]-1,+\infty[$.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.
3. Trouver un équivalent de f en -1 et montrer que f est intégrable sur $]-1,0]$.
4. Trouver la limite de f en $+\infty$.
5. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{a}{x^b}$.

Exercice 22 *(Mines)* On considère $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\arctan(n+x) - \arctan(n))$. Étudier f : monotonie, régularité, comportement asymptotique ; tracer son graphe.

Exercice 23 *(Mines)*

1. Donner le domaine de définition de $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$ et étudier sa monotonie et sa continuité.
2. Déterminer limites et équivalents éventuels de $S(x)$ en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 24 *(Centrale)*

1. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, justifier l'existence de $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} -\ln(1-e^{-nx})$.
2. Montrer que la série de fonctions de la question précédente converge uniformément sur tout $[a,+\infty[$ avec $a > 0$. Y a-t-il convergence uniforme sur $]0,+\infty[$?
3. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$, puis un équivalent de f en 0.

Exercice 25 *(Mines)* Montrer que $\sum \dfrac{x\,e^{-nx}}{\ln n}$ converge simplement mais non normalement sur $\mathbb{R}^+$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 26 *(Mines)* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Préciser la monotonie de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Donner un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 27 *(Mines)* Soient $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$ et $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}^2(nx)}$.

1. Déterminer les domaines de définition de f et de g.
2. Donner des équivalents de f et de g en 0^+.

Exercice 28 *(Mines)* Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1+x}{n+x}\right) \cdot$ Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Trouver un équivalent de f en $+\infty$. Étudier les variations de f.

Exercice 29 *(Mines)* Soit $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Montrer que ζ est définie et continue sur $]1, +\infty[$.
2. Trouver un équivalent de ζ en 1^+.

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n : x \mapsto \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{t}{t^x}$.
3. Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$. On pose $U = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Montrer que U est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. Donner un développement asymptotique à deux termes de ζ au voisinage de 1^+.

Exercice 30 *(X)** Soient $\zeta : x \in]1, +\infty[\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f et étudier la dérivabilité de f.
2. Montrer que, pour $x \in]1; +\infty[$, on a : $\zeta(x) = \frac{f(x)}{1 - 2^{1-x}}$.
3. Donner un développement asymptotique (à deux termes) de ζ au voisinage de 1^+.
4. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.
5. Montrer que la fonction $x \mapsto \zeta(x) - \frac{1}{x-1}$ est prolongeable par continuité sur $]0, +\infty[$.
6. Donner un développement asymptotique de $\zeta(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
7. Montrer que ζ est convexe et tracer son graphe.

Exercice 31 *(Mines-Centrale)**

1. Étudier la convergence sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ de la série de fonctions $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$. La fonction somme f est-elle continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$?
2. Soit g définie sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ par $g(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$. Montrer que $h = f - g$ est continue sur $\mathbb{R}$, puis qu'elle vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{x+1}{2}\right) = Ch(x)$ avec $C > 2$.
3. En déduire que $f = g$, puis que $\zeta(2) = \pi^2/6$.

Exercice 32 *(X-SR)** Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_N : x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z} \mapsto \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n}$.

1. Montrer que $(g_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. On note g sa limite.
2. Montrer que g est continue.
3. Montrer que g est impaire, 1-périodique et vérifie l'équation fonctionnelle :

   $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z},\ g(x) = \frac{1}{2}\big(g(x/2) + g((x+1)/2)\big)$.
4. Montrer que $g(x) = \pi\text{cotan}(\pi x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

Exercice 33 *(Centrale)**

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $u_n(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

1. Montrer que la série de fonction $\sum u_n$ converge simplement.

2. Montrer que $f : x \mapsto -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est l'unique fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, convexe, vérifiant $f(1) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x+1) - f(x) = \ln(x)$.

Exercice 34 *(X)** On définit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f_n(x) = \frac{n!\, n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}.$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$. On note Γ sa limite.
2. Montrer que $\Gamma > 0$, que $\Gamma(1) = 1$, que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et que $x \mapsto \ln\Gamma(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés de la question précédente. Montrer que $f = \Gamma$.

Exercice 35 (SR) Soit a, b deux réels tels que $a \in\ ]0,1[$, $b > 1$ et $ab > 1$. On pose $f_{a,b} : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$ et $\alpha = -\frac{\ln a}{\ln b}$.

1. Montrer que $f_{a,b}$ est définie sur $\mathbb{R}$, bornée et continue.
2. Montrer que $f_{a,b}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b^{-n\alpha} \cos(b^n \pi x)$ pour tout réel x.
3. Montrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f_{a,b}(x) - f_{a,b}(y)| \leqslant C\, |x-y|^\alpha$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\int_{x-h}^{x+h} f_{a,b}(t)\, \cos(b^n \pi t)\, \mathrm{d}t$ pour $h = 2b^{-n}$.

Exercice 36 *(ENS)*

1. Montrer que $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{-1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $[0,1]$, $\phi_n = x \mapsto \int_0^x (1 - g(nt^2))\, \mathrm{d}t$. Montrer que ϕ_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et tend uniformément vers 0 sur [-1,1].
3. Soit $\epsilon > 0$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $\psi_p = \psi_{p,\epsilon}$, $\mathcal{C}^\infty$ sur [-1,1], telle que :
$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N},\ \psi_p^{(k)}(0) = \delta_{k,p} \\ \forall k \in [\![0, p-1]\!],\ \sup\limits_{x\in[-1,1]} |\psi_p^{(k)}(x)| \leqslant \epsilon \end{cases}$$
4. En déduire que pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, il existe $f \in \mathcal{C}^\infty([-1,1], \mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = a_n$.

Exercice 37 *(PLSR)* On admet qu'il existe $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ égale à 1 sur $[-1/2, 1/2]$ et à 0 en dehors de l'intervalle $[-1,1]$. Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On cherche $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(0) = a_n$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \longmapsto \frac{a_n}{n!} x^n \varphi(x)$ et $f_n : x \longmapsto \frac{1}{{\lambda_n}^n} g_n(\lambda_n x)$, avec $\lambda_n \geqslant 1$ à fixer. Soit $h = \sum f_n$. Montrer qu'on peut choisir les $(\lambda_n)_n$ pour que h convienne.

Exercice 38 *(PLSR)* Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $|f_n(x) \times f_m(x)| \leqslant 2^{-|n-m|}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$ et que sa somme est bornée.
2. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 39 *(PLSR)* Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\lambda_n - n^2| \leqslant Cn$. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{\lambda_n}\right)$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 40 *(X)* Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, croissante telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$. On considère les fonctions $u_n : z \mapsto a_n\, \mathrm{e}^{-\lambda_n z}$ et on s'intéresse à la suite de fonctions $\sum u_n$.

1. On suppose que $\sum a_n$ converge. Montrer que la série de fonctions converge uniformément sur tout domaine $A_C = \{z = x + iy,\ x > 0,\ |y| \leqslant Cx\}$ (où C>0).
2. On suppose maintenant que la série de fonctions converge en un point $z_0 \in \mathbb{C}$. Déduire de la question précédente un domaine sur lequel la série de fonctions converge uniformément.
3. On suppose que pour $x \in [A, +\infty[$, la série $\sum u_n(x)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.

Exercice 41 *(X)* On note E l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est appelée base de type S lorsque pour tout $f \in E$ il existe une unique suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$f = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n g_n$ avec convergence uniforme.

1. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux distincts de $[0,1]$ telle que $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, et $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans $[0,1]$.
2. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de type S. Montrer que $\left(\dfrac{g_n}{\|g_n\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de type S.
3. Soit $f \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_n la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui est continue, affine sur chaque intervalle ouvert inclus dans $[0,1]\backslash\{x_0, \ldots, x_n\}$, et coïncide avec f en $x_0, \ldots, x_n$. Montrer que $(F_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
4. En déduire l'existence d'une base de type S.

Autour des séries de Fourier

Exercice 42 **(Centrale-X)* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique. On pose $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, \mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{Z}$, puis $S_N(f) : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\, e^{inx}$ et $D_N : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$ pour $N \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_a^b \phi(t)\, e^{ixt}\, \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $\phi \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{C})$.
2. Montrer que $S_N(f)(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \dfrac{f(x+u) + f(x-u)}{2} D_N(u)\, \mathrm{d}u$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que $D_N(u) = \dfrac{\sin(N + \frac{1}{2})u}{\sin u}$ pour tout $u \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$.
4. Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$, $S_n(f)(t) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right)$.
5. Dans le cas où f est $\mathcal{C}^1$, montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 43 *(X)*

1. Montrer que $\forall x \in\,]0, 2\pi[\,$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}$.
2. Montrer que, $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sup_{x\in]0,2\pi[} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n} \geqslant 1$.

Exercice 44 *(X)* On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$.

1. Justifier la définition de f et préciser sa régularité.
2. Étudier les symétries de f.
3. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\, \mathrm{d}x$ pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.
4. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2$.
5. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 f(x)\, \mathrm{d}x$.
6. Montrer que, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = x^2$.

Exercice 45 *(X)* Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathbb{R}^+$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,\pi]$, on pose $f_n(t) = a_n \sin(nt)$.

1. Montrer qu'il existe une constante absolue C telle que, si p et q sont dans $\mathbb{N}$ avec $p < q$ et $t \in [0,\pi]$, alors $\left|\sum_{k=p}^{q} a_k \sin(kt)\right| \leqslant Ca_p$.
2. On suppose que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,\pi]$.
3. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,\pi]$ si et seulement si $na_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Théorèmes de convergence uniforme

Exercice 46 *(Centrale)** Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers g. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est k-lipschitzienne. Montrer que la convergence est uniforme sur $[a,b]$.

Exercice 47 *(X-Centrale)** Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions convexes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui converge simplement vers une fonction f.

1. Montrer que f est convexe.
2. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$.
3. On suppose que les f_n et f sont dérivables. Montrer que (f_n') converge uniformément vers f' sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Exercice 48 *(Centrale)* Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $D \subset \mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.

1. On suppose que la convergence est uniforme. Montrer que les fonctions f_n sont *équi-continues*, c'est à dire :
$$\forall\ x \in D,\ \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ y \in]x-\delta, x+\delta[\cap D,\ |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$
2. On suppose que les fonctions sont uniformément équicontinues, c'est à dire :
$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0 \text{ tq } \forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall x \in D,\ \forall\ y \in]x-\delta, x+\delta[\cap D,\ |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$
Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment.

Exercice 49 *(Mines)**

1. Soit E un espace métrique. On consière $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties compactes non vides. Monter que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est non vide.
2. Soit X une partie compacte de E, et soit $(f_n)_n \in (\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$, une suite décroissante de fonctions tendant simplement vers la fonction nullle. Montrer que la suite $(\|f_n\|_\infty)$ admet une limite réelle, puis que celle-ci est nulle.
3. *(Théorème de Dini)* Soit $(f_n)_n$ une suite monotone de fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$, tendant simplement vers une fonction g continue. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 50 *(Mines)* (Théorème de Dini)* Soit (f_n) une suite de fonctions continues et croissantes d'un segment $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction continue f. Montrer qu'il y a convergence uniforme.

Exercice 51 *(SR)* * Sot $X = [a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. On considère $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur X vers une fonction f. Montrer que pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de X et tout x de X tels que $x_n \to x$, on a $f_n(x_n) \to f(x)$.
2. On suppose que pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de X et tout x de X tels que $x_n \to x$, on a $f_n(x_n) \to f(x)$, pour f fonction de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est continue et que la convergence est uniforme.

Résultats de densité

Exercice 52 *(IMT)** Pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, soit $N(f) = \sup\left\{\left|\int_0^1 f(t)t^n \,\mathrm{d}t\right| \ ;\ n \in \mathbb{N}\right\}$. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 53 *(Mines)** On note $E = \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer la densité dans E de l'espace des fonctions polynomiales.

Exercice 54 *(X)* Pour $x \in]0,1[$, on pose $\phi(x) = 2x(1-x)$. On définit par récurrence la suite de fonctions $(\phi_n)_{n\geqslant 0}$, de $]0,1[$ vers $\mathbb{R}$, par $\phi_0 = \mathrm{Id}_{]0,1[}$ et $\phi_n = \phi \circ \phi_{n-1}$.

1. Soit $x \in]0,1[$. Étudier la convergence de la suite $\big(\phi_n(x)\big)_{n\geqslant 0}$.
   Soit I un segment inclus dans $]0,1[$.
2. Étudier le mode de convergence de la suite de fonctions $(\phi_n)_{n\geqslant 0}$ sur I.
3. Soit $f \in \mathcal{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Établir l'existence d'une suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$, à valeurs dans $\mathbb{Z}[X]$, convergeant vers f uniformément sur I.

Exercice 55 *(Mines)*

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $D(t) = t - \lfloor t \rfloor$. Déterminer pour $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ la limite de $\displaystyle\int_a^b f(t)D(nt)\,\mathrm{d}t$.

Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ que peut-on dire de la limite de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)D(nt)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 56 *(ENS)*

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que f est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales associées à des polynômes pairs.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour qu'elle soit limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales associées à des polynômes impairs.

Exercice 57 *(X-Mines)*

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ croissante. Montrer que f est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales croissantes.
2. Montrer qu'une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si elle est limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de polynômes convexes.

Exercice 58 *(ENS)*

1. Soient $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $a_1,\dots,a_n$ des points de $[0,1]$. Montrer qu'il existe une suite (P_k) de polynômes qui converge uniformément vers f sur $[0,1]$ et qui prend les mêmes valeurs que f aux points $a_1,\dots,a_n$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que f ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur $[0,1]$. Soit $\varepsilon > 0$. Existe-t-il $P \in \mathbb{R}[X]$ ayant les même zéros que f sur $[0,1]$ et tel que $\|f-P\|_\infty \leqslant \varepsilon$?

Exercice 59 *(Paris)* Déterminer l'ensemble des fonctions réelles qui sont limites uniformes sur $[-1,0]$ d'une suite de polynômes œfficients positifs.

Exercice 60 *(X-Mines)*

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Montrer l'existence d'une suite de polynômes $(P_n)_n$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $P_n(0) = 0$ et qui converge uniformément vers f.
2. Soit $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R}),\ \lim\limits_{+\infty} f = 0 \right\}$ qu'on munit de $\|.\|_\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $h_n : \begin{cases}]0,+\infty[& \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \mathrm{e}^{-nt} \end{cases}$.
   Montrer que $\mathrm{Vect}(\{h_n,\ n \in \mathbb{N}^*\})$ est dense dans E.
3. (X) Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $k \geqslant 1$, montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $|e^{-kx} - e^{-x}P(x)| \leqslant \varepsilon$. On commencera par $1 \leqslant k \leqslant 2$.
4. En déduire que les fonctions $x \mapsto e^{-x}P(x)$, avec $P \in \mathbb{R}[X]$ sont denses dans E.

Exercice 61 *(X)* Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On dit qu'un endomorphisme T de E est positif si, pour tout $f \in E$, $f \geqslant 0$ implique $T(f) \geqslant 0$. On pose, pour $i \in \mathbb{N}$, $e_i : x \in [0,1] \mapsto x^i$.

1. Soit $f \in E$. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que : $\forall x,y \in [0,1]$, $|f(x)-f(y)| \leqslant \epsilon + \dfrac{2\,\|f\|_\infty}{\delta^2}\,(x-y)^2$.
2. Soit $(T_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'endomorphismes positifs de E. On suppose que, pour $i \in \{0,1,2\}$, la suite $(T_n(e_i))$ converge uniformément vers e_i sur $[0,1]$. Montrer que, pour tout $f \in E$, la suite $(T_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.