Programme de colles - Semaine 9 - du 27/11 au 1/12

Topologie des espaces vectoriels normés : tout le cours a été vu sans la connexité par arcs et sans les compléments (hors-programmes) usuels notamment la précompacité ou la propriété de Borel-Lebesgue. Tout cela sera vu la semaine prochaine et sera au programme la semaine suivante.

Applications linéaires continues : Pour qu'une application linéaire u de E dans F soit continue, il faut et il suffit qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leqslant C\|x\|$. Notation $\mathcal{L}_c(E,F)$. Norme subordonnée (ou norme d'opérateur) d'une application linéaire continue (de nouveau au programme). Notations $|||u|||$, $\|u\|_{\mathrm{op}}$. La norme d'opérateur est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$. Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur. Adaptation aux matrices.

Si E est un espace vectoriel de dimension finie (muni d'une norme N_∞, e), toute application linéaire de E vers F est continue. Exemple des applications polynomiales en les coordonnées (*ex :* $Gl_n(\mathbb{K})$ est ouvert et dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Critère de continuité des applications multilinéaires.

Parties compactes d'un espace normé : Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass. Une partie compacte est fermée et bornée. Une partie fermée d'une partie compacte est compacte. Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.
Produit d'une famille finie de compacts. Si E est un espace vectoriel de dimension finie (muni de la norme $N_{\infty,e}$), une partie est compacte si et seulement si elle est fermée-bornée.
Image d'une partie compacte par une application continue. Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des bornes atteintes. Théorème de Heine.

Espaces vectoriels normés de dimension finie : Équivalence des normes sur un espace de dimension finie. Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie. Les étudiants doivent savoir que la convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée (le théorème de Riesz a été vu mais est hors programme). Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie admet au moins une valeur d'adhérence. Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.
Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.
Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue. Continuité des applications polynomiales, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies.