Programme de colles - Semaine 12 - du 08/01 au 12/01

Suites et séries de fonctions : exercices sur tout le chapitre.

Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie : Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace normé de dimension finie E. Ce chapitre pourra être l'occasion de donner également des exercices de MPSI sur les fonctions d'une variable réelle.

Dérivabilité en un point : Dérivabilité en un point. Formes équivalentes : taux d'accroissement, développement limité à l'ordre 1. Traduction en termes de coordonnées dans une base de E. Dérivabilité à droite et à gauche. Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivabilité et dérivée de $L \circ f$, où L est linéaire. Dérivabilité et dérivée de $B(f,g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1,\dots,f_p)$, où M est multilinéaire. Cas du produit scalaire, du déterminant. Dérivabilité et dérivée de $f \circ \varphi$ où φ est une fonction réelle de variable réelle et f une fonction vectorielle. Applications de classe $\mathcal{C}^k$. Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$.

Intégration sur un segment $I = [a,b]$: Intégrale d'une fonction continue par morceaux. Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$. Linéarité de l'intégrale. Relation de Chasles. Pour L linéaire, intégrale de $L(f)$. Inégalité triangulaire $\left\|\int_a^b f\right\| \leqslant \int_a^b \|f\|$. Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière.

Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ pour f continue. Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Intégrale $x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt$: Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ pour f continue. Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
Formules de Taylor : Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange. Formule de Taylor-Young à l'ordre n. Les étudiants doivent connaître la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales (reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange).

Séries dans un espace vectoriel normé de dimension finie : Sommes partielles. Convergence, divergence. La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$. Somme et restes d'une série convergente. En cas de convergence, notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Linéarité de la somme. Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Divergence grossière. Lien suite-série, séries téléescopique.Série absolument convergente. Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente. Le critère de Cauchy est hors programme.

Intégration sur un intervalle quelconque et interversions : En début de semaine, peu d'exercices auront été corrigés ; privilégier des exemples simples d'applications des théorèmes.

Théorème de convergence dominée : Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leqslant \varphi$ pour tout n. Alors : $\int_I f_n \longrightarrow \int_I f$. Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t. Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème d'intégration terme à terme : Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I, alors, dans $[0,+\infty]$, $\int_I \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \Big)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\ \mathrm{d}t$. En particulier, l'intégrabilité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I équivaut à $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) t < +\infty$.

Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n(t)| \, \mathrm{d}t$ converge, alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t) \, \mathrm{d}t.$$

Très joyeuses fêtes et excellentes vacances !