Programme de colles - Semaine 11 - du 11/12 au 15/12

Suites et séries de fonctions : Le programme de cette semaine porte essentiellement sur les suites de fonctions et les approximations uniformes. Le cours sur les séries de fonctions a été commencé, mais en dehors des exemples du cours, aucun exercice n'a encore été corrigé. Et nous n'avons pas encore traité d'exemples d'études asymptotiques. Il est donc préférable d'éviter d'interroger les étudiants sur les séries de fonctions en début de semaine. Cela peut être éventuellement l'objet d'exercices simples en fin de semaine.
Dans ce chapitre, les fonctions sont définies sur une partie A d'un espace vectoriel E de dimension finie et à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie.

Convergence simple et uniforme sur A. Convergence simple sur A. Propriétés transmises par convergence simple. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple. Pour des fonctions bornées, interprétation de la convergence uniforme sur A en termes de norme.

Le caractère k-lipschitzien (k fixé), ou borné par M (fixé), sont transmis à la limite simple d'une suite de fonctions. Idem pour le caractère croissant (ou décroissant) et la convexité dans le cas de fonctions réelles d'une variable réelle.

Continuité : Si les u_n sont continues en a et si (u_n) converge uniformément vers u sur un voisinage de a, alors u est continue en a. En particulier, toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A. L'hypothèse de convergence uniforme peut n'être vérifiée que de manière locale : la convergence uniforme au voisinage de tout point de A suffit. Dans le cas $A \subset \mathbb{R}$, on pourra montrer la convergence uniforme sur tout segment ou sur des intervalles adaptés.

Théorème de la double limite : soit (u_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers u sur un voisinage d'un point a adhérent à A ; si, pour tout n, u_n admet une limite ℓ_n en a, alors (ℓ_n) admet une limite ℓ et $u(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$. On remarque que si $A \subset \mathbb{R}$, ce résultat s'adapte aux cas où $a = +\infty$ et $a = -\infty$.

Intégration d'une limite uniforme sur un segment : Soit (u_n) une suite de fonctions continues définies sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F, a un point de I. On suppose que (u_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, on définit $U_n(x) = \displaystyle\int_a^x u_n$ et $U(x) = \displaystyle\int_a^x u$. Alors (U_n) converge uniformément vers U sur tout segment de I.
Si (u_n) converge uniformément vers u sur le segment $[a, b]$, alors : $\displaystyle\int_a^b u_n \to \int_a^b u$.

Dérivation d'une suite de fonctions : Soit (u_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F. Si (u_n) converge simplement sur I vers une fonction u, et si (u_n') converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction v, alors (u_n) converge uniformément vers u sur tout segment de I, u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $u' = v$. Extension aux suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Approximation uniforme : Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.
Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment est à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme de fonctions polynomiales.

Séries de fonctions : Convergence simple, convergence uniforme. Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers 0. Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point.

Adaptation au cas des séries de fonctions des théorèmes sur les suites de fonctions (continuité, double limite).
Dans le cas $A = I \subset \mathbb{R}$, traduction des théorèmes d'intégration sur un segment et de dérivation pour les séries de fonctions.