Feuille d'exercices : Interversions et intégrales - Intégrale à paramètres

Interversions de limites

Exercice 1 *(Mines-divers)* Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de :

1. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t^n}\ \mathrm{d}t$,
2. $\displaystyle\int_0^1 f(t^n)\ \mathrm{d}t$, avec $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$,
3. $\displaystyle n\int_0^1 \ln(1+t^n)\ \mathrm{d}t$,
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n \ln x}{1+x}\ \mathrm{d}x$.
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan(nx)\mathrm{e}^{-x^n}\ \mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\ \mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} nf(x)\mathrm{e}^{-nx}\ \mathrm{d}x$, avec $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ bornée.

Exercice 2 *(IMT)* Pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^n}$.

1. Donner I_0, I_1, I_2.
2. Donner $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$.
3. Trouver un équivalent de $I_n - I$ quand n tend vers l'infini.
4. On pose $\displaystyle J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\ \mathrm{d}x$. Montrer que $\displaystyle J = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(1+k)^2}$.

Exercice 3 *(CCINP)* Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^{\infty} n\mathrm{e}^{-x^n}\ \mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y} dy$.

Exercice 4 *(Centrale)* On pose pour $n \in \mathbb{N}$ $f_n : x \mapsto n^2 x\mathrm{e}^{-nx}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_n$ sur $[0,1]$.
2. Soit g une fonction continue par morceaux sur $[0,1]$. Étudier la limite de $\displaystyle\int_0^1 g(t)f_n(t)\ \mathrm{d}t$.

Exercice 5 *(Saint-Cyr)* Pour $n \in \mathbb{N}$, soient $\displaystyle I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\ \mathrm{d}t$, $\displaystyle W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\ \mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\displaystyle I_n \longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$.
2. En déduire un équivalent de W_{2n+1}, puis un équivalent de W_n.

Exercice 6 *(IMT)*

1. La fonction $\displaystyle f(t) = \frac{\ln^2 t}{1+t^2}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?
2. Montrer que $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = 2\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = 2\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Exercice 7 *(ENTPE-EIVP)* Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}}\ \mathrm{d}x$.

Exercice 8 *(Mines -ENSEA-ENSIIE)* Montrer, pour $x > 1$: $\displaystyle\zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t-1}\ \mathrm{d}t$.

Exercice 9 *(Mines)* Montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} (\zeta(x)-1)\ \mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$.

Exercice 10 *(Mines/CCINP)* Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^1 x^x\ \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

Exercice 11 *(Mines)* Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln((x))\mathrm{d}x = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Exercice 12 *(Mines)* Soient $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{1+t}}\ \mathrm{d}t$ et $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. Justifier l'existence de I et S, puis exprimer I en fonction de S.

Exercice 13 *(Mines)*

1. Soient a et b dans $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$. w
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 14 *(Mines)*

1. Ensemble de définition et limites aux bornes de $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$.
2. Montrer que $F(x) = 1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2x^2-1}$.
3. On note l la limite en $+\infty$ de F ; donner un équivalent de $l - F(x)$ en $+\infty$.

Exercice 15 *(Mines)* Soit $x > 0$. Développer $S(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1-e^{xt}}\ \mathrm{d}t$ en série de fonctions rationnelles.

En déduire un équivalent de S en 0^+.

Exercice 16 *(Mines)* Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+|x|} f(x-n)\ \mathrm{d}x$. Étudier la convergence de $(I_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 17 *(Mines)* Pour $n \geqslant 2$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{1+1/n} \sqrt{1+x^n}\ \mathrm{d}x$. Trouver un équivalent de I_n.

Exercice 18 *(Mines)* Pour $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$.

1. Montrer que $I_n(\alpha)$ est bien définie.
2. Déterminer une relation de récurrence entre $I_{n+1}(\alpha)$ et $I_n(\alpha)$; en déduire une expression de $I_n(\alpha)$.
3. Montre que la suite $(I_n(\alpha))$ converge et trouver sa limite.
4. Montrer qu'il existe $K(\alpha) > 0$ tel que $I_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K(\alpha)}{n^{1/\alpha}}$.

Exercice 19 *(Mines)*

1. Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{x^2\ln(x)}{x-1}$. Montrer que f peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On notera encore f le prolongement ainsi obtenu.
2. Montrer que la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\ \mathrm{d}x$ converge vers 0. Trouver un équivalent de I_n.
3. Montrer que $n\displaystyle\int_0^1 x^n f(x^n)\ \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 20 *(Mines)* Limite et équivalent simple en 0^+ de $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\ \mathrm{d}t$.

Exercice 21 *(X)* Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2} \mathrm{d}x$, puis $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{n} \left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2} \mathrm{d}x$.

Exercice 22 *(Lyon)* Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que si $\int_0^1 |f_n|$ tend vers $\int_0^1 |f|$ quand n tend vers $+\infty$ alors $\int_0^1 |f_n - f|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
2. Montrer que si $\int_0^1 f_n^2$ tend vers $\int_0^1 f^2$ quand n tend vers $+\infty$ alors $\int_0^1 (f_n - f)^2$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 23 *(X)** Si $P \in \mathbb{C}[X]\backslash\{0\}$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$, soit $N_r(P)$ le nombre de racines de P de module au plus r comptées avec multiplicités. On admet dans les deux premières questions le résultat suivant : si P et Q sont dans $\mathbb{C}[X]\backslash\{0\}$ et $\mathbb{C}[X]$ respectivement, si $r \in \mathbb{R}^{+*}$ est tel que, pour tout $x \in \mathbb{C}$ de module r, $|Q(z)| < |P(z)|$, alors $N_r(P+Q) = N_r(P)$.

1. Déduire de l'énoncé admis le théorème de d'Alembert-Gauss.
2. Soit $P = X^4 + 6X + 3$. Déterminer $N_2(P), N_1(P), N_{1/3}(P)$.
3. Soient $r \in \mathbb{R}^{+*}$, $P \in \mathbb{C}[X]\backslash\{0\}$ ne s'annulant par sur le cercle de centre 0 et de rayon r. Montrer que $N_r(P) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{P'}{P}(re^{it})re^{it}\,\mathrm{d}t$, d'abord en utilisant le théorème de d'Alembert-Gauss, ensuite en l'évitant.
4. Déduire de la question précédente le résultat admis en début d'énoncé.
5. Pour toute fraction rationnelle $f \in \mathbb{C}(X)$ et tout réel tel que f n'ait ni zéro ni pôle de module r on pose $N_r(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(re^{it})}{f(re^{it})}re^{it}\,\mathrm{d}t$. Prouver que, lorsque $N_r(f)$ est bien défini, il est égal au nombre de zéros de f dans le disque $D_0(r)$ diminué du nombre de pôles de f dans le disque $D_0(r)$ (les deux étant comptés avec multiplicité).

Exercice 24 *(X)* On pose $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}\cdot$ Pour $y \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g_y : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{y}\,g(x/y)$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue, nulle en dehors d'un segment.

1. Montrer que, pour tout réel x, la fonction $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,g_y(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers $f(x)$ en 0^+.
2. Montrer plus précisément que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que $\left|\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,g_y(t)\,\mathrm{d}t - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in]0, \delta]$.

Intégrales à paramètres

Exercice 25 *(Mines)* Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$. Étudier F puis calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 26 *(Mines)* Domaine de définition, continuité et équivalents aux bornes de $f : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t^x}}$.

Exercice 27 *(Mines)* Domaine de définition et calcul de $g : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 28 *(ENSEA-ENSIIE)*

1. Montrer que $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-itx}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Établir une équation différentielle vérifiée par F puis exprimer F simplement.

Exercice 29 *(Mines)* On fixe $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

1. Soit, pour $b \in \mathbb{R}$, $F(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos(2bx)\,\mathrm{d}x$. Trouver une équation différentielle vérifiée par F et déterminer F.
2. Pour $b \in \mathbb{R}$, soit $G(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\sin(2bx)\,\mathrm{d}x$. Montrer que $G(b) = \frac{1}{a}\,e^{-\frac{b^2}{a}}\int_0^b e^{\frac{x^2}{a}}\,\mathrm{d}x$.
3. Trouver la limite de $G(b)$ puis celle de $bG(b)$ en $+\infty$.

Exercice 30 *(Mines)*

1. Montrer que f et g, définies par :
$f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\,\mathrm{d}t$ et $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis qu'elles sont égales.
2. Déterminer leurs limites en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 31 *(Mines)*

1. Domaine de définition de $f\colon x \mapsto \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t+x}\mathrm{d}(t)$.
2. Justifier la dérivabilité de f et exprimer $f'(x)$ (sans intégrale).
3. On pose pour $x > 0$, $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$. Calculer g.

Exercice 32 *(Mines)* Soit $g : x \in]-1, +\infty[\mapsto \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier la définition de g.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer g'.

Exercice 33 *(SR)* Soit $F : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xu^2}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$.

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Quelle est la limite de F en $+\infty$?
4. Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

Exercice 34 *(SR)*

1. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$ et calculer la valeur commune.

   On pose pour $t \in \mathbb{R}^+$, $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x^2+i)t^2}}{x^2+i}\,\mathrm{d}x$.
2. Montrer que F est continue. Étudier la limite de F en $+\infty$.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Calculer $F'(t)$ pour $t > 0$.
4. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.
5. Calculer $\int_{\mathbb{R}} e^{i(yt^2+ixy)}\,\mathrm{d}y$ pour x réel.

Exercice 35 *(Mines)* Pour $x > 0$, on pose $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}\mathrm{d}t$.

1. Justifier que I est bien définie.
2. Trouver la limite de $I(x)$ quand x tend vers 0_+.
3. Trouver un équivalent quand x tend vers 0_+.

Exercice 36 *(Mines)* Étudier la monotonie, les limites et équivalents aux bornes du domaine de la fonction suivante :

$$f(x) = e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Exercice 37 *(X)* On étudie la fonction $f\colon x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$.

1. Trouver un équivalent de f en $+\infty$.
2. Trouver un développement asymptotique à l'ordre n de f.

Exercice 38 *(X)* Soit $f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tu)}{u(1+u^4)}\,\mathrm{d}u$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer les quatre premières dérivées et trouver une équation différentielle vérifiée par f en calculant $f^{(4)} + f$.

Exercice 39 *(X)* Soit $I : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{t+x}\,\mathrm{d}t$. Trouver un équivalent de $I(x)$ quand x tend vers $0+$.

Exercice 40 *(Mines)* Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}-1}{t}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\forall u \in \mathbb{R}$, $\left|e^{iu} - 1\right| \leqslant |u|$.
2. Montrer que f est dérivable et en déduire une expression de f.

Exercice 41 *(Mines)* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 e^{xu\ln(u)}\ \mathrm{d}u$.

1. Domaine de définition de f ?
2. Soit g une fonction continue par morceaux et bornée sur $\mathbb{R}$, continue en 0. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, g(u)\, e^{-xu}\ \mathrm{d}u$ tend vers $g(0)$ quand $x \to +\infty$.
   Que peut-on dire si g est supposée intégrable au lieu de bornée ?
3. Déterminer la limite de $xf(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 42 *(Mines-X)* Montrer que pour tout réel x, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \pi e^{-|x|}$.

Exercice 43 *(X)*

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\ \mathrm{d}u$ converge.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\ \mathrm{d}t$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\ \mathrm{d}u$.

Exercice 44 *(X)* Pour $i \in \{1, 2\}$, on note L^i l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telles que $|f|^i$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$: en outre on note $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f|^2}$ pour $f \in L^2$.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $x \mapsto xf(x)$ appartienne à L^2 et f' appartienne à $L^1 \cap L^2$. Montrer que $f \in L^2 \cap L^1$, que $x \mapsto xf(x)^2$ appartient à L^1 et que f tend vers 0 en $\pm\infty$.
   Pour $g \in L^1$, on pose $\widehat{g} : y \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-iyx}\ \mathrm{d}x$. On admet que si en outre $g \in L^2$ alors $\widehat{g} \in L^2$ et $\|\widehat{g}\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|g\|_2$.
2. Montrer que $\widehat{f'}(y) = iy\widehat{f}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que $x \mapsto x\,(\widehat{f})^2(x)$ appartient à L^2.

Exercice 45 *(X)* Soit $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{K}_c$) l'espace des fonctions continues (resp. continues par morceaux) à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, soit τ_x l'endomorphisme de $\mathcal{K}$ défini par

$$\forall f \in \mathcal{K},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \tau_x(f)(t) = f(t-x).$$

1. Pour $f \in \mathcal{K}$ et $g \in \mathcal{K}_c$, on pose
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\ \mathrm{d}t.$$
   Montrer que $f * g$ appartient à $\mathcal{K}$.
2. Soit T un endomorphisme de $\mathcal{K}$ commutant à τ_x pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tel que
   $$\forall f \in \mathcal{K}, \quad \|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$$
   Montrer que
   $$\forall (f, g) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}_c, \quad T(f * g) = T(f) * g.$$

Exercice 46 *(X)* Soit $f \colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continue à droite et de carré intégrable. On pose pour $x > 0$, $S_f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(y)}{x+y}\mathrm{d}y$.

1. Justifier la bonne définition de S_f.
2. Montrer que S_f est de carré intégrable.
3. Pour $\delta > 0$, on définit $f_\delta : x \mapsto \sqrt{\delta}x^{-\frac{1+\delta}{2}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $\displaystyle\lim_{\delta \to 0} \int_0^{+\infty} S_{f_\delta}^2(y)\mathrm{d}y$.

Autour de la fonction Gamma

Exercice 47 *(ENS)* On pose $\Gamma : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{+*}} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\forall y \in \,]0,1[\,,\ \dfrac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)} < x^y$ et $\forall y \in [1,+\infty[\,,\ \dfrac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)} \geqslant x^y$.

Exercice 48 *(X-Centrale)* On définit les fonctions Γ, de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $\mathbb{R}$, et B, de $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ vers $\mathbb{R}$, par les égalités $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ et $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier la définition de Γ et de B.
2. Exprimer $B(x+1,y)$ puis $B(x+1,y+1)$ en fonction de $B(x,y)$.

   On souhaite montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*},\ B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.
3. Expliquer pourquoi il suffit de le montrer pour $x > 1$ et $y > 1$.

   On pose $x > 1$ et $y > 1$. On note $F_{x,y}$ la primitive sur $\mathbb{R}_+$ de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x+y-1}$ qui s'annule en 0, et $G(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}\big((1+u)z\big)\,\mathrm{d}u$.
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{z\to+\infty} G(z) = \Gamma(x+y)\beta(x,y)$.
5. Montrer que G est $\mathcal{C}^1$, et en déduire une expression de $\displaystyle\lim_{z\to+\infty} G(z)$. Conclure.
6. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^{x-1}-1}{t}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$. *Ind.* Écrire $B(x,y) - \dfrac{1}{y}$ sous forme intégrale.

Exercice 49 *(X)*

1. Soit $t > 0$. Montrer que l'application $f_t : s \in]t,+\infty[\mapsto \left(1 - \dfrac{t}{s}\right)^s$ est croissante.
2. Soit Γ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par l'égalité $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

   Montrer que $\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.
3. Montrer que $\forall x > 0,\ \Gamma(2x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2x-1}\Gamma(x)\,\Gamma\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$.

Exercice 50 *(X)*

1. On pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que $H_n - \ln n$ tend vers une limite $\gamma > 0$.
2. Pour $t \in \mathbb{R}^{+*}$, soit $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}\,\mathrm{d}x$. Montrer que Γ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $\Gamma'(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to 0}\Big(\int_y^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x + \ln y\Big)$.
3. En déduire que $\Gamma'(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-e^{-x}}\Big)\,\mathrm{d}x = -\gamma$.

Exercice 51 (X) Soient $\alpha, \beta > 0$. Pour $x > 0$, on pose $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\beta-1}e^{-t-xt^{\alpha}}\mathrm{d}t$.

1. Déterminer la limite et un équivalent de I en $+\infty$.
2. Donner le développement asymptotique de I à tout ordre.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ce développement soit la somme partielle d'une série convergente pour tout $x > 0$.