MP*2 LLG
2023/2024

Programme de colles - Semaine 6 - du 6/11 au 10/11

Algèbre linéaire sans réduction : exercices de réduction

Réduction : Le cours est bien avancé ; l'essentiel du programme a été vu mais sans les compléments usuels. Et très peu d'exercices auront été corrigés. Les étudiants manqueront donc de pratique et de recul. Commencez par des exercices très élémentaires (recherche d'éléments propres, applications directes de résultats du cours...). Vous pourrez poser des exercices plus élaborés la semaine suivante (ou dès cette semaine si vous avez des étudiants excellents).

Sous-espace stable par un endomorphisme : Endomorphisme induit sur un sous-espace stable. En dimension finie, traduction de la stabilité d'un sous-espace F par un endomorphisme u à l'aide de la matrice de u dans une base adaptée à F.

Droite stable par un endomorphisme. Valeurs et vecteurs propres : Éléments propres d'un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre. Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie est l'ensemble de ses valeurs propres. Équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$.

Somme des sous-espaces propres : La somme des sous-espaces propres est directe. Majoration du cardinal du spectre. Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension n est de cardinal au plus n.
Si deux endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v (de même pour le noyau et l'image).

Valeurs et vecteurs propres d'une matrice : Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres et spectre d'une matrice carrée. Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$. Deux matrices semblables ont même spectre. Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$, le spectre de M dans $\mathbb{K}$ est inclus dans le spectre de M dans $\mathbb{L}$.

Polynôme caractéristique : Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Notations χ_u, χ_A. Le polynôme caractéristique est unitaire de degré n. Valeurs des coefficients de degrés 0 et $n-1$. Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. Polynôme caractéristique d'une matrice diagonale, triangulaire.
Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit divise le polynôme caractéristique.
Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de M dans $\mathbb{K}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbb{K}'$.
Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. Deux matrices semblables ont même spectre.

Multiplicité : Multiplicité d'une valeur propre. La dimension du sous-espace propre associé à λ est majorée par la multiplicité de λ.

Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables : Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale. Une telle base est constituée de vecteurs propres. Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à E. Cas des projecteurs, des symétries.
Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé soit diagonalisable. Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.

Pour qu'un endomorphisme u soit diagonalisable, il faut et il suffit que χ_u soit scindé et que, pour toute valeur propre de u, la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité.

Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables : Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure. Interprétation géométrique.
Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Pour qu'une matrice carrée soit trigonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme canoniquement associé le soit. La pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif du programme. On se limite au cas $n = 2$ et à des cas particuliers simples pour $n = 3$.
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres.

Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée : Pour u dans $\mathcal{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$. Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de u. Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathcal{L}(E)$. Pour M dans $\mathbb{K}[X]$, morphisme $P \mapsto P(M)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, idéal annulateur de M, sous-algèbre $\mathbb{K}[M]$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée. Le polynôme minimal est unitaire.
Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $(u^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.
Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P. Si $u(x) = \lambda\, x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)\, x$. Le spectre est égal à l'ensemble des racines du polynôme minimal.
Exemples de polynômes minimaux pour les homothéties, projecteurs, symétries, endomorphismes diagonalisables, nilpotents.

Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes : Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrice nilpotente. L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E. Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0. Polynôme minimal et caractéristique d'un endomorphisme nilpotent.

Lemme de décomposition des noyaux : Si $P_1, \ldots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à P, alors : $\ker\left(P(u)\right) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker\left(P_i(u)\right).$

Critère de diagonalisabilité : Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.
Polynôme minimal d'un endomorphisme induit. Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit.

Endomorphismes cycliques et matrices compagnons : Les résultats de cette partie doivent être redémontrés. Calcul du polynôme caractéristique d'une matrice compagnon. Définition d'un endomorphisme cyclique ; leur polynôme caractéristique est égal à leur polynôme minimal polynôme minimal. Démonstration du théorème de Cayley-Hamilton. D'autres propriétés autour du polynôme minimal ponctuel et des endomorphismes cycliques (leur commutant, leurs *sev* stables *etc*) ont été vus mais sont hors programme.

Endomorphismes à polynôme caractéristique scindé : Si le polynôme caractéristique de u est scindé, décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables par u sur chacun desquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent. Traduction matricielle. Suite à cela, on a abordé la décomposition de Dunford, mais cette dernière est hors programme et non exigible (on peut faire redémontrer les résultats aux étudiants).