Programme de colles - Semaine 5 - du 16/10 au 20/10

Polynômes : exercices de révision sur tout le chapitre.

Algèbre linéaire sans réduction :

Somme d'un nombre fini de sous-espaces : Somme de deux sous-espaces. Somme directe de deux sous-espaces. La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique. Caractérisation par l'intersection. Somme d'un nombre fini de sous-espaces. Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces. La somme $F_1+\cdots+F_p$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F_1+\ldots+F_p$ sous la forme $x_1+\cdots+x_p$ avec $x_i \in F_i$ est unique. Caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul. Sous-espaces supplémentaires. Espaces supplémentaires, caractérisations. Cas de la dimension finie.

Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation des endomorphismes vérifiant $p^2 = p$ et $s^2 = \text{ Id}$. Projecteurs associés à une décomposition $E = \bigoplus_{j=1}^{s} F_j$.

Suite des images et noyaux itérés : les résultats classiques.

Changements de bases : Matrice de changement de base. La matrice de passage $P_e^{e'}$ de e à e' est la matrice de la famille e' dans la base e. Inversibilité et inverse de $P_e^{e'}$. Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'une application linéaire.

Matrices équivalentes et semblables : Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est de rang r, il existe une base e de E et une base f de F telles que : $\quad \mathrm{Mat}_{e,f}(u) = J_r$. Matrices équivalentes. Interprétation géométrique. Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r. Classification des matrices équivalentes par le rang. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.

Matrices semblables. Interprétation géométrique.

Pivot de Gauss : matrices de transvection et leur effet par multiplication à gauche et à droite. Algorithme du pivot de Gauss. Les transvections engendrent $Sl_n(\mathbb{K})$.

Formes linéaires et hyperplans Forme linéaire. Hyperplan. Si H est le noyau d'une forme linéaire non nulle, alors pour toute droite D non contenue dans H : $\quad E = H \oplus D$. Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est le noyau d'une forme linéaire non nulle. En dimension n, les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$. Comparaison de deux équations d'un même hyperplan. Si E est un espace de dimension finie n, l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n-m$.
D'autres résultats classiques autour des bases duales, de la dimension exacte de l'intersection de m hyperplans ont été vues mais sont hors programme ; tous ces résultats doivent être redémontrés avant d'être utilisés.

Formes n-linéaires alternées : Forme n-linéaire alternée. Antisymétrie, effet d'une permutation. Pour une application n-linéaire équivalence entre antisymétrie et caractère alterné. Si f est une forme n-linéaire alternée et si $(x_1,\ldots,x_n)$ est une famille liée, alors $f(x_1,\ldots,x_n) = 0$.

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base : Si E est de dimension n, l'espace des formes n-linéaires alternées est de dimension 1. Si e est une base, il existe une et une seule forme n-linéaire alternée f pour laquelle $f(e) = 1$. Toute forme n-linéaire alternée est un multiple de $\det_e$. Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées. Comparaison, si e et e' sont deux bases, de $\det_e$ et $\det_{e'}$. La famille $(x_1,\ldots,x_n)$ est une base si et seulement si $\det_e(x_1,\ldots,x_n) \neq 0$.

Déterminant d'un endomorphisme : Déterminant d'un endomorphisme. La définition est indépendante de la base. Déterminant d'une composée. Caractérisation des automorphismes.

Déterminant d'une matrice carrée : Déterminant d'une matrice carrée. Lien avec le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base ; lien avec le déterminant d'un endomorphisme. Déterminant d'un produit. Caractérisation des matrices inversibles. Déterminant d'une transposée.
Caractérisation du rang d'un matrice avec les mineurs.

Comatrice : Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Comatrice. Relation $A\,{}^t\mathrm{Com}(A) = {}^t\mathrm{Com}(A)A = \det(A)I_n$.

Déterminant de Vandermonde.