Programme de colles - Semaine 2 - du 25/9 au 29/9

Séries numériques et familles sommables : exercices de révision.

Intégration sur un intervalle quelconque : Les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, corps des réels ou des complexes.

Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, b[$ $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, *ou* $]a, b]$ *:* Pour f continue par morceaux de $[a, b[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ a une limite finie en b. (Dans le cas où b réel et f continue par morceaux sur $[a, b]$ cette limite existe et vaut $\displaystyle\int_a^b f$). Si tel est le cas, on note $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ ou cette limite. Équivalence entre la convergence de $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_c^b f$. Linéarité de l'intégrale sur $[a, b[$, positivité. Si f est continue, dérivation de $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f$. Adaptation aux intervalles $]a, b]$.

Intégration des fonctions positives sur un intervalle de la forme $[a, b[$ *:* Si f est positive sur $[a, b[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est majorée. Écriture $\displaystyle\int_a^b f = +\infty$ en cas de divergence.

Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$. Adaptation à $]a, b]$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t$. Pour $a \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\ \mathrm{d}t$.
Intégrabilité sur un intervalle de la forme $]a, b]$ *ou* $[a, b[$ *:* Une fonction f est dite intégrable sur $[a, b[$ si elle est continue par morceaux sur $[a, b[$ et si $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge. On utilise indifféremment les expressions : f est intégrable sur $[a, b[$ et l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge absolument.

Pour f de signe constant, $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a, b[$. Un calcul montrant que $\displaystyle\int_I |f| < +\infty$ vaut preuve d'intégrabilité.
Si f est intégrable sur $[a, b[$, alors $\displaystyle\int_a^b f$ converge. Idem sur $]a, b]$. L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[b, a[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$:

- si $f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x))$, l'intégrabilité de g sur $[b, a[$ implique celle de f ;
- si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$, l'intégrabilité de g sur $[b, a[$ équivaut à celle de f.

Intégration sur un intervalle quelconque : Intégrale généralisée d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$. Notations $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,ṭ$. Intégrale convergente en b, en a. Écriture $\displaystyle\int_a^b f = +\infty$ si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et d'intégrale divergente. Pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence. Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

Intégration par parties sur un intervalle quelconque : Notation $[fg]_a^b$; l'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature et en cas de convergence : $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\ \mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\ \mathrm{d}t$.

Changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a, b[$ et une fonction $\varphi\ :\ ]\alpha, \beta[\to]a, b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\ \mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence. Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. On applique ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable usuels.

Espace $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$: Pour f intégrable de I dans $\mathbb{K}$, notation $\displaystyle\int_I f$. Inégalité triangulaire. Si f est continue et intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\displaystyle\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{|x-a|^\alpha}\mathrm{d}x$. La fonction f est intégrable en a (resp. b) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0.

Intégration des relations de comparaison (la fonction de référence est positive) : domination, négligeabilité, équivalence, pour les restes dans le cas où la fonction de référence est intégrable, pour les intégrales partielles dans le cas contraire.