Feuille d'exercices : Polynômes et fractions rationnelles

Division euclidienne, divisibilité, PGCD

Exercice 1 *(CCP-IMT)*

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soient $(a,b) \in \mathbb{K}^2$. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
2. Donner le reste de la division euclidienne de $P(X) = (X\sin\theta + \cos\theta)^n$ par X^2+1.

Exercice 2 *(Mines)* Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X-3)^{2n} + (X+2)^n - 2$ par $(X-3)^3$.

Exercice 3 *(IMT)*
Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $(X+3)P(X) = XP(X+1)$.

Exercice 4 *(Mines)* Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul tel que $P(X^2) = P(X+1)P(X)$.

1. Montrer que toute racine de P est soit nulle soit de module 1.
2. Déterminer P.

Exercice 5 *(Mines-Centrale)*

1. Déterminer les polynômes P tels que P' divise P.
2. Déterminer les polynômes P tels que P divise XP'.

Exercice 6 Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Notons (q,r) le couple quotient/reste de la division euclidienne de m par n.

1. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^m - 1$ par $X^n - 1$.
2. En déduire une C.N.S. portant sur n et m pour que X^n-1 divise X^m-1 dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Quel est le PGCD de X^n-1 et X^m-1 ?

Exercice 7 *(Centrale)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$. Pour $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, on pose $\mathcal{F}(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)\, X^k$ et $\check{\mathcal{F}}(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^{-k})\, X^k$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ et $\check{\mathcal{F}}$ sont des automorphismes de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.
2. Calculer $\check{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}$.
3. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{U}_n$, $|P(z)| \leq 1$. On suppose que P possède une racine dans $\mathbb{U}_n$. Montrer que $X^n - 1$ divise P.

Exercice 8 *(Lyon)* Quels sont les $P \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $\forall z \in \mathbb{U}, |P(z)| \leq 1$?

Racines et factorisation des polynômes

Exercice 9 *(Mines-IMT)* Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(X - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}})$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 10 *(Mines)* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n(X) = (1+iX)^n - (1-iX)^n$.

1. Déterminer, selon la parité de n, le degré de P.
2. Déterminer les racines de P dans les deux cas : n pair et n impair et en déduire la décomposition de P en polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
3. En déduire, lorsque n est impair, la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \tan(\frac{k\pi}{n})$.

Cas de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$

Exercice 11 *(IMT)* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ simplement scindé sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que P' est simplement scindé sur $\mathbb{R}$.
2. Comparer les moyennes arithmétiques des racines de P et P'.

Exercice 12 *(Mines)* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0$. On pose $Q = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) \geq 0$.

Exercice 13 *(Centrale-X)** Soit $\Gamma = \left\{P \in \mathbb{R}[X],\ \exists (A, B) \in \mathbb{R}[X]^2,\ P = A^2 + B^2\right\}$.

1. Montrer que Γ est stable par produit.
2. Montrer l'équivalence : $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ (P \in \Gamma) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0)$.
3. Montrer l'équivalence : $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ (\forall x \in \mathbb{R}_+,\ P(x) \geq 0) \Leftrightarrow (\exists (A, B) \in \Gamma^2,\ P = A + XB)$.

Exercice 14 *(X)* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in [0, 1], P(x) \geq 0$.

1. On suppose que P est de degré 2. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}[X]$ et $c \in \mathbb{R}^+$ tels que $P = A^2 + cX(1 - X)$.
2. Dans le cas général, montrer que P s'écrit $A^2 + XB^2 + (1 - X)C^2 + X(1 - X)D^2$ où $A, B, C, D \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 15 *(Centrale)** Pour $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, soit $Z(P)$ l'ensemble des racines de P dans $\mathbb{C}$. Soient P et Q dans $\mathbb{C}[X]$ non constants tels que $Z(P) = Z(Q)$ et $Z(P - 1) = Z(Q - 1)$. Montrer que $P = Q$.

Exercice 16 *(X)** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. Montrer que $\max\limits_{x \in [-1,1]} |P(x)| \geq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Exercice 17 *(X)* Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n simplement scindé sur $\mathbb{R}$. On note $a_1 < \cdots < a_n$ les racines de P.

1. Montrer que P' est simplement scindé sur $\mathbb{R}$. On note $b_1 < \cdots < b_{n-1}$ les racines de P'.
2. Montrer que $b_1 \leq \dfrac{a_1 + a_2}{2}$. Étudier le cas d'égalité.
3. On écrit $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} p_i X^i$. Montrer que les racines de P sont dans l'intervalle

$$\left[-\frac{p_{n-1}}{n} - \frac{n-1}{n}\sqrt{p_{n-1}^2 - 2p_{n-2}}\ ,\ -\frac{p_{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n}\sqrt{p_{n-1}^2 - 2p_{n-2}}\right].$$

Exercice 18 *(X)* Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n, $Q = 2XP' - nP$.

1. On suppose que les racines de P sont toutes dans $\mathbb{U}$. Montrer qu'il en est de même de celles de Q.
2. Soit $R \in \mathbb{R}^+$. On suppose que toutes les racines de P sont de module R. Que dire de celles de Q ?

Exercice 19 *(SR)* Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la suite $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ par :

$P_0 = 1$ et, pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, $P_k(X) = \dfrac{1}{k!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(X - (a + \ell))$.

1. (a) Montrer que $(P_0, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
   (b) Montrer que $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \forall i \in \mathbb{Z},\ P_k(i) \in \mathbb{Z}$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ un polynôme prenant des valeurs entières en $n + 1$ entiers consécutifs.
   Montrer que $P(i) \in \mathbb{Z}$ pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$.
3. Le résultat précédent est-il préservé si les $n + 1$ entiers ne sont plus supposés consécutifs ?
4. Caractériser les polynômes P tels que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Exercice 20 *(X)* * Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que P induit une surjection de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$.

1. Montrer que P appartient à $\mathbb{Q}[X]$.
2. Montrer que P est de degré 1.

Exercice 21 *(X)* Soient (a_n) une suite de complexes non nuls, et $P_n = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$. Soit $r > 0$. Montrer que pour n assez grand, les racines de P_n ne sont pas toutes dans le disque $|z - r| < r$.

Exercice 22 *(Paris)* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(\mathbb{R}^{+*}) \subset \mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(1 + X)^n P$ soit à coefficients dans $\mathbb{R}^+$.

Irréductibilité et extension de corps

Exercice 23 *(X)* Soit $P \in Q[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P de multiplicité strictement plus grande que $\dfrac{n}{2}$. Montrer que nécessairement $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Exercice 24 *(Mines)**

1. Montrer que le polynôme $P = X^3 - X - 1$ admet une unique racine réelle a.
2. Donner une base de $V = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}\left\{a^k, k \in \mathbb{N}\right\}$.
3. L'espace V est-il un corps pour les lois usuelles ?

Exercice 25 *(X)** Soit $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{5}}$.

1. Déterminer le polynôme minimal de ω.
2. On pose $\mathbb{K} = \mathrm{Vect}(1, \omega, \omega^2, \omega^3)$. Déterminer sa dimension comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Montrer que c'est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
3. Comment trouver l'expression de l'ivnerse d'un élément non nul de $\mathbb{K}$?
4. Montrer qu'il existe un unique automorphisme σ de $\mathbb{K}$ tel que $\sigma(\omega) = \omega^2$.
5. Soit τ un automorphisme de $\mathbb{K}$ Montrer qu'il existe $1 \leq k \leq 4$ tel que $\tau = \sigma^4$.

Exercice 26 *(Mines)* Quelle est la dimension du $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par $\mathbb{U}_5$?

Exercice 27 *(Mines-ENS)** Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre commutative intègre de dimension finie.

1. Montrer que A est un corps.
2. Montrer que, pour tout $a \in A$, l'ensemble $\{P \in \mathbb{R}[X],\ P(a) = 0\}$ est un idéal engendré par un polynôme irréductible.
3. Montrer que A est isomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 28 *(X)* Soit K une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension finie, contenant $\mathbb{R}$ et telle que tout élément non nul de K soit inversible.

1. Soit $a \in K \setminus \mathbb{R}$. Montrer que $\mathbb{R}[a]$ est une sous-algèbre de K isomorphe à $\mathbb{C}$.
2. On suppose dans cette question que la diemnsion de K vaut $2, 3$ ou 4. Montrer que K est isomorphe à C ou à l'algèbre des quaternions $\mathrm{Vect}(1, i, j, k)$ avec les relations $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$ et $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

Cas de $\mathbb{Q}[X]$ et $\mathbb{Z}[X]$

Exercice 29 Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$. On considère le polynôme $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$.

1. Montrer que si $r = \dfrac{p}{q}$ (avec $p \wedge q = 1$) est racine de l'équation alors $q | a_n$ et $p | a_0$.
2. Que peut-on conclure si le polynôme P est unitaire (i.e. $a_n = 1$) ?
3. Si $r = \dfrac{p}{q}$ (avec $p \wedge q = 1$) est racine de l'équation montrer que : $\forall m \in \mathbb{Z},\ p - mq | P(m)$.
4. Donner une décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{Q}[X]$ du polynôme $2X^3 + 5X^2 - 8X - 12$.

Exercice 30 *(Mines-X)* * Soient $a_1 < \cdots < a_n$ des entiers relatifs, $P = 1 + \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)^2$. Montrer que P est un irréductible de $\mathbb{Z}[X]$. Montrer de même que $\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(X - a_j) - 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 31 *(ULCR)* Soit $d \in \mathbb{N}^*$, et $0 < a_1 < \ldots < a_n$ des entiers. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{d}(X - n a_k) - 1$.

1. Étudier le comportement asymptotique des racines de P_n.
2. Montrer que P_n est irréductible dans $\mathbb{Z}$ pour tout n assez grand.

Exercice 32 *(Mines)* Soit $P = X^3 - 3X + 1$. Montrer que P admet trois racines réelles irrationnelles. Montrer qu'aucune de ces racines n'est annulée par un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ de degré 2.

Exercice 33 *(X)** Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est premier. Montrer que P est constant.

Exercice 34 *(X)** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note μ_n l'ensemble des racines primitives n-ièmes de 1 et on pose $\Phi_n = \displaystyle\prod_{z \in \mu_n}(X - z)$.

1. Montrer que $\displaystyle\prod_{d|n} \Phi_d = X^n - 1$, puis que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, Φ_n est dans $\mathbb{Z}[X]$.

2. Soit μ la fonction de Möebius de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{d|n} \mu(d) = \delta_{1,n}$.
3. Soient $(G,+)$ un groupe abélien, f une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans G, F la fonction définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, F(n) = \sum_{d\,|\,n} f(d)$.

   Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = \sum_{d\,|\,n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) F(d)$. Comment se transforme cette formule si $(G,\times)$ est un groupe multiplicatif et f une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans G ?
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression de Φ_n à l'aide des $X^d - 1$ pour d divisant n.

Exercice 35 *(L)* On pose $\Phi_1(X) = X - 1$ et pour tout $n \geq 2$, $\Phi_n(X) = \dfrac{X^n - 1}{\prod_{\substack{d|n \\ d<n}} \Phi_d(X)}$.

1. Montrer que $\Phi_n(X) = \prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \wedge n = 1}} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$.
2. Montrer que $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$.
3. Montrer que, pour p et q deux nombres premiers distincts, Φ_{pq} est à coefficients dans $\{0, \pm 1\}$.
4. Donner le coefficient en X^7 dans Φ_{105}.

Exercice 36 *(X)*

1. Décomposer $X^5 - 1$ en produit d'irréductibles de $\mathbb{Q}[X]$.
2. Soit p un nombre premier. Décomposer $X^p - 1$ en produit d'irréductibles de $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 37 *(X)* Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{3}$?

Exercice 38 *(PLSR)* Soient $(A,+,\times)$ un anneau commutatif et M un idéal de A. On dit que M est maximal si M est différent de A et si tout idéal de A contenant M est égal à M ou à A.

1. Soit M un idéal de A. Montrer que M est maximal si et seulement si, pour tout $a \notin M$, il existe $x \in M$ et $u \in A$ tels que $1 = x + u \times a$.
2. Soient $(B,+,\times)$ un anneau commutatif et $f : A \to B$ un morphisme surjectif de A sur B. Montrer que si M est un idéal maximal de A alors $f(M)$ est un idéal maximal de B.
3. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Déterminer les idéaux maximaux de $\mathbb{K}[X]$.
4. Soit M un idéal maximal de $\mathbb{Z}[X]$ tel que $M \cap \mathbb{Z} \neq \{0\}$. Montrer qu'il existe p premier tel que $M \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$. Puis montrer qu'il existe P et Q irréductibles dans $\mathbb{Z}[X]$ tels que $M = (P) + (Q)$.

Exercice 39 *(L)* Soit p un nombre premier, dont on note $p = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0}^{10}$ l'écriture décimale. Montrer que le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Cas des corps finis et de $A[X]$

Exercice 40 *(PLSR)* Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique p.

1. Montrer que $\sigma : x \mapsto x^p$ est un morphisme de corps de $\mathbb{K}$.
2. Montrer que σ est surjectif si et seulement si tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible vérifie $P' \neq 0$.

Exercice 41 *(PLSR)*

1. Montrer qu'un groupe fini G est cyclique si et seulement si pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ divisant n, G a au plus un sous-groupe de cardinal d.
2. Soit $\mathbb{K}$ un corps fini. Montrer que $\mathbb{K}^*$ est cylique.
3. Soit p un nombre premier impair et soit $\mathbb{K}$ un corps fini de cardinal p^2. Montrer que $X^4 + 1$ admet toujours une racine dans $\mathbb{K}$.
4. En déduire que $X^4 + 1 \in \mathbb{F}_p[X]$ n'est pas irréductible.

Exercice 42 *(X)* Soit A un anneau commutatif non nul. On dit que $b \in A$ est un diviseur de 0 si $b \neq 0$ et s'il existe $c \neq 0$ tel que $bc = 0$.

1. Montrer que, si A est fini et n'admet aucun diviseur de 0, alors A est un corps.

2. On pose $B = A[X]$. Montrer que $P \in B \setminus \{0\}$ est un diviseur de 0 si et seulement s'il existe $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $aP = 0$.

Fractions rationnelles

Exercice 43 *(Centrale)* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré ≥ 2.

1. On suppose P scindé sur $\mathbb{R}$ et on considère x tel que $P'(x) = 0$ et $P(x) \neq 0$. En utilisant $\dfrac{P'}{P}$, montrer que $P''(x)P(x) < 0$.
2. Soient x_1 et x_2 deux racines consécutives de P. Montrer que $P'(x_1)P'(x_2) \leq 0$.
3. Soient $a < b$ tels que $P - a$ et $P - b$ sont scindés. Montrer que P' est scindé à racines simples.

Exercice 44 *(Mines-Centrale-ENS)**

1. *(Th. de Gauss-Lucas)* Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que toute racine de Q' est barycentre à coefficients positifs des racines de Q.
2. (ENS) En déduire pour $1 \leq n \leq 4$ la conjecture (de Casas-Alvero) : soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n tel que, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, P et $P^{(i)}$ aient une racine commune ; alors P a une unique racine.

Exercice 45 *(X-Mines)** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé.

1. Montrer que $x \mapsto (P'(x))^2 - P(x)P''(x)$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$.
2. Si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, montrer que pour tout $1 \leq k \leq n-1$, $a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$.

Exercice 46 *(Lyon)* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n > 0$. Montrer que P est simplement scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(P^{(i)}(x))^2 - P^{(i-1)}(x)\, P^{(i+1)}(x) > 0$.

Exercice 47 *(X-ENS)**

1. Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.
2. Déterminer les $F \in \mathbb{C}(X)$ tels que $F(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Exercice 48 *(Mines)* Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, un polynôme scindé à racines simples. On note $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ses racines. On suppose que P ne s'annule pas en 0.

1. Montrer que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i P'(x_i)} = -\frac{1}{P(0)}$.
2. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg Q \leq n-2$. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{Q(x_i)}{P'(x_i)}$.

Exercice 49 *(Mines)* Soient $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes deux à deux distincts, $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - z_i)$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{P''}{P'}(z_k)$.

Exercice 50 *(X)* Soit P un polynôme complexe non nul ayant au moins deux racines distinctes et tel que P'' divise P.

1. Montrer que P est à racines simples.
2. Montrer que les racines de P sont alignées.

Exercice 51 *(X)** Si $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$, soit $N_r(P)$ le nombre de racines de P de module au plus r comptées avec multiplicités. On admet dans les deux premières questions le résultat suivant : si P et Q sont dans $\mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ et $\mathbb{C}[X]$ respectivement, si $r \in \mathbb{R}^{+*}$ est tel que, pour tout $x \in \mathbb{C}$ de module r, $|Q(z)| < |P(z)|$, alors $N_r(P+Q) = N_r(P)$.

1. Déduire de l'énoncé admis le théorème de d'Alembert-Gauss.
2. Soit $P = X^4 + 6X + 3$. Déterminer $N_2(P), N_1(P), N_{1/3}(P)$.
3. Soient $r \in \mathbb{R}^{+*}$, $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ ne s'annulant par sur le cercle de centre 0 et de rayon r. Montrer que $N_r(P) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{P'}{P}(re^{it})re^{it}\,\mathrm{d}t$, d'abord en utilisant le théorème de d'Alembert-Gauss, ensuite en l'évitant.
4. Déduire de la question précédente le résultat admis en début d'énoncé.

5. Pour toute fraction rationnelle $f \in \mathbb{C}(X)$ et tout réel tel que f n'ait ni zéro ni pôle de module r on pose $N_r(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{f'(re^{it})}{f(re^{it})}\, re^{it}\, \mathrm{d}t$. Prouver que, lorsque $N_r(f)$ est bien défini, il est égal au nombre de zéros de f dans le disque $D_0(r)$ diminué du nombre de pôles de f dans le disque $D_0(r)$ (les deux étant comptés avec multiplicité).

Exercice 52 *(Centrale-ENS L-Mines-X)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note U_n l'ensemble des racines complexes $X^n + 1$.

1. À l'aide de la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^n+1}$, calculer $\displaystyle\sum_{z \in U_n} \dfrac{z}{1-z}$.
2. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $XP'(X) = \dfrac{n}{2}P(X) + \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{z \in U_n} \dfrac{zP(zX)}{(z-1)^2}$.
3. Pour $Q \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\|Q\| = \displaystyle\sup_{z \in \mathbb{U}} |Q(z)|$. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\|P'\| \leq n\|P\|$.

Exercice 53 *(X)* Soient p et q deux nombres premiers distincts. Montrer que $\dfrac{X^p - 1}{X-1}$ et $\dfrac{(X^{pq}-1)(X-1)}{(X^p-1)(X^q-1)}$ sont des polynômes.

Exercice 54 *(X)* Soient $(m_i)_{1 \leq i \leq n}$ des éléments de $\mathbb{N}^*$ et $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ des nombres réels dans l'ordre strictement croissant, et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_j,\ 1 \leq j \leq n\}$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{m_i}{x - x_i}$. Montrer que $f^{-1}[a, +\infty[$ est une réunion finie d'intervalles bornées. Calculez la somme des couleurs des intervalles.

Exercice 55 *(X-ENS)*

1. Soient $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$, non nuls et premiers entre eux, tels que $A + B = C$. Soit m le nombre de racines distinctes de ABC. Montrer que $m > \max(\deg(A), \deg(B), \deg(C))$.
   Ind. Montrer l'égalité $A\left(\dfrac{A'}{A} - \dfrac{C'}{C}\right) = B\left(\dfrac{C'}{C} - \dfrac{B'}{B}\right)$
2. Soient n un entier supérieur ou égal à 3 et $P, Q, R \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P^n + Q^n + R^n = 0$. Montrer que P, Q, R sont égaux à constante multiplicative près.

Exercice 56 *(ENS L)* Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe un unique $P_N \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P_N(X + X^{-1}) = X^N + X^{-N}$.
2. Donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{P_N}$.

Exercice 57 *(X)*

Si $F \in \mathbb{C}(X)$ est non constant, on pose $\Phi_F : R \in \mathbb{C}(X) \mapsto R(F) \in \mathbb{C}(X)$.

1. Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ non constant. Montrer que Φ_F est un endomorphisme d'algèbre de $\mathbb{C}(X)$.
2. Montrer que tout endomorphisme d'algèbre de $\mathbb{C}(X)$ est de la forme Φ_F avec F non constant.
3. Montrer que tout endomorphisme d'algèbre de $\mathbb{C}(X)$ est injectif.
4. Montrer que Φ est un automorphisme d'algèbre si et seulement s'il existe $R \in \mathbb{C}(X)$ tel que $\Phi(R) = X$.
5. Soit $F = \dfrac{P}{Q}$. On suppose que ϕ_F est un automorphisme. Montrer que $\deg(P) \leq 1$ et $\deg(Q) \leq 1$.
6. Déterminer complètement les automorphismes d'algèbre de $\mathbb{C}(X)$.