

Révisions d'algèbre linéaire

Noyaux, images et rangs

Exercice 1 Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels (on admettra l'existence de supplémentaires). Soient f et g deux applications linéaires de E dans F .

1. Montrer l'équivalence entre
 - (a) $\ker f \subset \ker g$
 - (b) $\exists h \in \mathcal{L}(F), g = h \circ f$
2. Montrer l'équivalence entre
 - (a) $\text{Im} g \subset \text{Im} f$
 - (b) $\exists h \in \mathcal{L}(E), g = f \circ h$

Exercice 2 (Mines-CCP)

1. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifiant $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$; montrer que $E = \ker u \oplus \text{Im} v$.
2. Quelle relation peut-on en déduire entre les rangs de u et v ?
3. (Mines) Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, E_1 tel que $E = \ker u \oplus E_1$ et F_1 tel que $F = \text{Im} u \oplus F_1$; montrer qu'il existe une unique application linéaire v de F dans E , de noyau F_1 , d'image E_1 , et telle que $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

Exercice 3 (CCP) Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $u^3 + u = 0$.

1. Montrer que $E = \ker u \oplus \text{Im}(u)$.
2. Montrer que $\text{Im}(u) = \ker(u^2 + \text{Id})$.
3. Montrer qu'en dimension impaire n n'est pas injective (on pourra raisonner par l'absurde).
4. On suppose désormais $n = 3$. En déduire que $\text{rg}(u) = 2$.
5. Montrer qu'il existe une base e de E dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (ENS Lyon) Soit E un K -espace vectoriel. On dit que $u \in \text{GL}(E)$ est un échangeur s'il existe des sous-espaces vectoriels F, G tels que $E = F \oplus G$, $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$. Montrer que u est un échangeur si et seulement si il existe des endomorphismes a et b tels que $u = a + b$ avec $a^2 = b^2 = 0$.

Exercice 5 (Mines) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si U et V sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'endomorphisme $\Phi_{U,V}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par l'égalité $\Phi_{U,V}(M) = UMV$.

1. Si A, B, C et D sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, exprimer $\Phi_{A,B} \circ \Phi_{C,D}$.
2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer $\text{rg} \Phi_{A,A}$.

Exercice 6 (Mines) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe U et V inversibles telles que $\text{rg}(UA + BV) = \min\{n, \text{rg}A + \text{rg}B\}$.
2. Montrer que, si $\text{rg}A + \text{rg}B \geq n$, il existe U et V inversibles telles que $UA + BV$ soit inversible.

Exercice 7 (X-Mines) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1, $t = \text{Tr}(A^{-1}B)$.

1. On suppose que $t \neq -1$. Montrer que $A + B$ est inversible d'inverse $A^{-1} - \frac{A^{-1}BA^{-1}}{1+t}$.
2. On suppose que $t = -1$. Montrer que $A + B$ n'est pas inversible.

Exercice 8 (Mines) Soient n et p deux éléments de \mathbb{N}^* , $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Montrer que $p + \text{rg}(I_n + AB) = n + \text{rg}(I_p + BA)$.

Exercice 9 (X) Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur u pour qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u + v$ soit inversible et $u \circ v = 0$.

Exercice 10 (Ulm) Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{rg}(AB) + \text{rg}(BC) \leq \text{rg}B + \text{rg}(ABC)$.

Exercice 11 (Ulm) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

1. Comparer le rang de M dans \mathbb{C} , dans \mathbb{R} , dans \mathbb{Q} et dans $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier.

2. Existe-t-il toujours p premier tel que $\text{rg}_{\mathbb{Q}}(M) = \text{rg}_{\mathbb{F}_p}(M)$?

Sous-espaces vectoriels, dimensions

Exercice 12 (IMT) Montrer que l'ensemble A des applications linéaires u d'un espace E dans un espace F , tous deux de dimension finie, telles que $\ker u$ contienne le sous-espace W de E , est un espace vectoriel. Trouver sa dimension.

Exercice 13 (Mines) Soient \mathbb{K} un corps, E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E ayant même dimension. Montrer que F et G ont un supplémentaire commun.

Exercice 14 (Mines) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comparer la dimension du \mathbb{R} -espace vectoriel $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MB\}$ et celle du \mathbb{C} -espace vectoriel $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AM = MB\}$.

Exercice 15 (Mines) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; AMB = 0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en calculer la dimension.

Endomorphismes nilpotents

Exercice 16 (Mines) Si A et B sont deux matrices complexes, carrées de taille n vérifiant $(AB)^n = 0$, a-t-on aussi $(BA)^n = 0$?

Exercice 17 (Mines) Soient E un espace vectoriel de dimension $n > 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent de rang $n - 1$.

1. Soit F un sous-espace vectoriel stable par u . Montrer que $F = \{0\}$ ou que $\ker u \subset F$.
2. Montrer que $\text{rg}(u^2) = \text{rg}(u) - 1$.
3. Soit F tel que $u(F) \subset F$. Montrer que $\dim u(F) = \dim F - 1$. En déduire que, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\dim \ker u^k = k$.
4. Déterminer les sous-espaces vectoriels stables par u .

Exercice 18 (Mines) Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = 0$.

1. Montrer que $\text{rg}(u) + \text{rg}(u^2) \leq n$.
2. Montrer que $2 \text{rg}(u^2) \leq \text{rg}(u)$.

Exercice 19 (TPE) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A^3 = 0$, $AB = BA$ et B est inversible. Montrer que $(A + B)$ est inversible.

Exercice 20 (X) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ nilpotente. Montrer que $I_n + M$ a une racine carrée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.

Autres exercices sur les endomorphismes et les matrices

Exercice 21 (Mines)* Que dire d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie qui stabilise toute droite vectorielle ?

Exercice 22 (X) Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^{10} qui stabilise tous les sous-espaces de dimension 5. Que dire de f ?

Exercice 23 (X) Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. Quels sont les endomorphismes de E qui stabilisent les hyperplans de E ?

Exercice 24 (Mines)

1. Que dire d'un endomorphisme de \mathbb{R}^n dont la matrice dans toute base est la même ?
2. Que dire d'un endomorphisme de \mathbb{R}^n qui commute avec tout projecteur ?

Exercice 25 (Mines-Centrale)* Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, tel que $\forall x \in E$, $(x, u(x))$ est lié. Montrer que u est une homothétie.
2. Montrer que $\text{Tr}(A) = 0$ si et seulement si A est semblable à une matrice de diagonale nulle.
3. Soit A telle que $\text{Tr}(A) = 0$. En déduire qu'il existe $(B, C) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})^2$ telle que $A = BC - CB$.

Exercice 26 (Théorème d'Hadamard) * Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

Montrer que A est inversible.

Exercice 27 (Mines) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent à toutes les matrices de permutation de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 28 (X) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si A est un sous-anneau de \mathbb{R} , on note $\text{SL}_n(A)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(A)$ de déterminant 1.

1. Montrer que $SL_n(\mathbb{A})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $SL_n(\mathbb{Q})$ ne possède pas de partie génératrice finie.
3. Montrer que $SL_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $SL_n(\mathbb{R})$.
4. * Montrer que $SL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 29 (*Ulm*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver les fonctions f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} telles que $\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, f(XY) \leq \min\{f(X), f(Y)\}$.

Exercice 30 (*SR*)* On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite bistochastique lorsque tous ses coefficients sont positifs et que la somme de ses coefficients sur une ligne ou une colonne quelconque vaut 1. On note $D_n(\mathbb{R})$ l'ensemble formé par ces matrices.

1. Montrer que $D_n(\mathbb{R})$ est convexe.
2. Un élément P de $D_n(\mathbb{R})$ est dit extrémal lorsque :
 $\forall (A, B) \in D_n(\mathbb{R})^2, \forall t \in]0, 1[, (1-t)A + tB = P \Rightarrow A = B$.
 Montrer que toute matrice de permutation est un élément extrémal de $D_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que tout élément extrémal de $D_n(\mathbb{R})$ est une matrice de permutation.

Exercice 31 (*X*) Soient $(n, p, a) \in \mathbb{N}^{*3}, U_1, \dots, U_p$ des parties distinctes de $\{1, \dots, n\}$ telles que, si $1 \leq i < j \leq p, |U_i \cap U_j| = a$. Montrer que $p \leq n$.

Ind. Considérer la matrice $(\mathbf{1}_{k \in U_i})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq i \leq p}}$.

Exercice 32 (*X*) Soient \mathbb{K} un sous-corps de $\mathbb{C}, n \geq 2$ un entier, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note $C(J) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) ; AJ = JA\}, \Gamma_n = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) ; M^n = J\}$.

1. Déterminer $C(J)$. Vérifier que $C(J)$ est une sous-algèbre commutative de la \mathbb{K} -algèbre $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
2. Montrer que, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la \mathbb{R} -algèbre $C(J)$ est isomorphe à \mathbb{C} . Déterminer Γ_n .
3. Montrer que, si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, la \mathbb{Q} -algèbre $C(J)$ est isomorphe à $\mathbb{Q}[i]$. Déterminer Γ_n . On admettra que les éléments d'ordre fini de $(\mathbb{Q}[i]^*, \times)$ sont ± 1 et $\pm i$.
4. Montrer que, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la \mathbb{C} -algèbre $C(J)$ est isomorphe à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Déterminer Γ_n .

Familles libres

Exercice 33 (*Mines-ENS*)* Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $f_a : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto |x - a| \end{cases}$. Montrer que la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 34 (*X*)* Soit A un ensemble non vide, \mathbb{K} un corps. Rappeler que $E = \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel. On considère $(f_j)_{1 \leq j \leq n} \in E^n$. Montrer que cette famille est libre si et seulement si il existe $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in A$ tel que $\det(f_j(x_i))_{i,j} \neq 0$.

Exercice 35 (*X*) Soit X un ensemble et n un entier naturel non nul.

1. Soit (f_1, \dots, f_n) une liste d'éléments de $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ telle que la matrice $(f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ soit non inversible pour toute n -liste $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$. Montrer que (f_1, \dots, f_n) est liée dans $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$.
2. Soient (f_1, \dots, f_n) et (g_1, \dots, g_n) deux n -listes d'éléments de $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ telles que, pour toute n -liste $(x_1, \dots, x_n) \in X^n, \det(f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n} = \det(g_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n}$. Montrer que l'une des conditions suivantes est vérifiée :
 - (i) $\text{Vect}(f_1, \dots, f_n) = \text{Vect}(g_1, \dots, g_n)$;
 - (ii) (f_1, \dots, f_n) et (g_1, \dots, g_n) sont liées.

Projecteurs

Exercice 36 (*CCP*)* Soit E un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} . F_0, F_1, G_0 et G_1 des s.e.v. de E . Soit f (*resp.* g) le projecteur de E de noyau F_0 (*resp.* G_0) et d'image F_1 (*resp.* G_1). Supposons que $f \circ g = g \circ f$.

1. Démontrer que $h = f \circ g$ est un projecteur de E et que son image est $F_1 \cap G_1$.
2. Déterminer le noyau de h .

Exercice 37 (*CCP*)* Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, soient p et q deux projecteurs définis sur E .

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q + q \circ p = 0$, si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Interpréter cette condition en terme de noyaux et d'images de p et q .

- Si $r = p + q$ est un projecteur, montrer que $\ker r = \ker p \cap \ker q$ et que $\text{Im} r = \text{Im} p + \text{Im} q$. Montrer que cette somme est directe.
- On suppose dans cette question que $r = p + q - p \circ q$ et $\text{Im} p \subset \ker q$; montrer que r est un projecteur dont on déterminera le noyau.

Exercice 38 (CCP) Soient L_1 et L_2 deux sous-espaces supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$, où E est de dimension finie n , tels que $\forall (u, v) \in L_1 \times L_2, u \circ v + v \circ u = 0$.

- Montrer qu'il existe deux projecteurs p_1 et p_2 dans $L_1 \times L_2$ tels que $Id = p_1 + p_2$.
- Montrer que $n = \text{rg}(p_1) + \text{rg}(p_2)$.
- Soit $u \in L_1$; montrer que, si $x \in \text{Im} p_2, u(x) = 0$ et si $x \in \ker p_2, u(x) \in \ker p_2$.
- En déduire que $\dim(L_1) \leq (n - \text{rg}(p_2))^2$; quelle inégalité a-t-on pour $\dim(L_2)$?
- Justifier que $\dim \mathcal{L}(E) = \dim(L_1) + \dim(L_2)$.
- Montrer que $\text{rg}(p_1)(n - \text{rg}(p_1)) \leq 0$ et en déduire que $\text{rg}(p_1) = 0$ ou $\text{rg}(p_1) = n$, puis que $L_1 = \{0\}$ ou $L_2 = \{0\}$.

Exercice 39 (ENS Lyon-X)*

- Soient n dans \mathbb{N}^*, A une partie finie de cardinal m de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ stable par produit. Montrer que $\sum_{M \in A} \text{Tr}(M) \in m\mathbb{Z}$.
- Soit G un sous-groupe fini de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\sum_{g \in G} \text{Tr}(g) = 0$. Montrer que $\sum_{g \in G} g = 0$.

Exercice 40 (Mines) Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et $(p_i)_{1 \leq i \leq r}$ une famille de projecteurs de E tels que $p = \sum_{j=1}^r p_j$ vérifie $p^2 = p$.

- Montrer que $\text{Im} p = \bigoplus_{j=1}^r \text{Im} p_j$.
- Pour tout $i \neq j$, montrer que $p_j \circ p_i = 0$.

Exercice 41 (Paris) Soient $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, A_1, \dots, A_m$ des éléments idempotents de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire vérifiant $A_k A_k = A_k$. Montrer que $\sum_{i=1}^m (n - \text{rg}(A_i)) \geq \text{rg}\left(I_n - \prod_{i=1}^m A_i\right)$.

Formes linéaires, hyperplans et traces

Exercice 42 (Mines)* Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

- Montrer qu'il existe une unique $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(A) = \text{Tr}(AC)$
- On suppose que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, f(AB) = f(BA)$. Montrer que $f = \lambda \text{Tr}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 43 (Mines)* Soit $n \geq 2$ et soit H un hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

- Montrer que H contient au moins une matrice inversible.
- On suppose que H est stable par multiplication. Montrer que $I_n \in H$.

Exercice 44 (X) Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2, H$ un hyperplan affine de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $H \cap \text{GL}_n(\mathbb{R})$ est non vide.

Exercice 45 (X) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \dots, X_{n^2}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^{n^2}$. On pose

$$\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto (\text{Tr}(MX_k))_{1 \leq k \leq n^2} \in \mathbb{C}^{n^2}.$$

- Donner une condition nécessaire et suffisante sur (X_1, \dots, X_{n^2}) pour que φ soit un isomorphisme d'espaces vectoriels.
- Donner une relation entre la dimension du noyau de φ et le rang de (X_1, \dots, X_{n^2}) .

Exercice 46 (Centrale 2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $E_n = \mathbb{R}_n(X)$ et $u_n : \begin{cases} E_n & \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto (\phi_0(P), \dots, \phi_n(P)) \end{cases}$, avec $\phi_k :$

$$\begin{cases} E_n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ P & \mapsto \frac{P^{(k)}(k)}{k!} \end{cases}$$

Par ailleurs, on note (e_0, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} .

- Écrire une fonction python qui prend en paramètre n et qui renvoie la matrice de u_n dans les bases canoniques de E_n et \mathbb{R}^{n+1} .
Faire une conjecture sur l'inversibilité de u_n .
- Pour tout $1 \leq k \leq 5$, écrire un programme python qui renvoie la matrice de u_k et son inverse. Faire une conjecture sur les polynômes $u_k^{-1}(e_j)$ (degré, coefficient dominant, nature de la famille).
- Montrer que (ϕ_0, \dots, ϕ_n) est libre dans E_n^* .
- Montrer que si (ψ_0, \dots, ψ_n) est une famille libre dans E_n^* , alors il existe une unique base (B_0, \dots, B_n) de E_n telle que pour tout $P \in E_n$, $P = \sum_{k=0}^n \psi_k(P) B_k$.
- Calculer cette famille (B_0, \dots, B_n) dans le cas où :
 - $\psi_k : P \mapsto \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$
 - $\psi_k : P \mapsto P(k)$.
- Dans le cas de la famille libre (ϕ_0, \dots, ϕ_n) , montrer que la base obtenue est la famille $(u_n^{-1}(e_0), \dots, u_n^{-1}(e_n))$.

Systèmes linéaires et déterminants

Exercice 47 (PLSR)*

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det A = \pm 1$.
- Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $(a, b)^T$ soit la première colonne d'une matrice de taille 2 à coefficients entiers de déterminant ± 1 .
- Soient a_1, \dots, a_n des entiers relatifs premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que $(a_1, \dots, a_n)^T$ est la première colonne d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ de déterminant ± 1 .
- Soient $U, V \in \mathbb{Z}^n$. Donne une condition nécessaire et suffisante sur U et V pour qu'il existe $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ dont la première colonne soit U et la deuxième V .

Exercice 48 (CCP)

- Soient P_0, P_1, \dots, P_n tels que chaque P_k soit unitaire de degré k . Soient $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice $(P_j(x_i))_{0 \leq i, j \leq n}$.
- Soient $\theta_0, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice $(\cos(j\theta_i))_{0 \leq i, j \leq n}$.

Exercice 49 (X)

- Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, a, b) \in \mathbb{R}^{n+2}$. Calculer $\det M$, où $M(i, i) = \alpha_i$, $M(i, j) = a$ si $i > j$ et $M(i, j) = b$ si $i < j$.
- Calculer le déterminant de la matrice M telle que $M(i, j) = i \wedge j$ pour $1 \leq i \leq j \leq n$.

Exercice 50 (Mines) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^4$ où D est inversible et $D^t C = C^t D$. Montrer que : $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A^t D - B^t C)$.

Pour plus tard : Étendre le résultat au cas où D est non-inversible.

Exercice 51 (Mines) Soit $A \in \text{Gl}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $C \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$. Montrer que $\det(A + BC) = \det(A)(1 + CA^{-1}B)$.

Exercice 52 (X)

- Soient \mathbb{K} un corps, $n, p \in \mathbb{N}^*$. Soient $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.
Exprimer $\det(M)$ en fonction de $\det(A)$ et de $\det(D - CA^{-1}B)$.
- Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{C}$, $\det(A + tB) = \det(A) + t \det(B)$. Que peut-on dire de A et B ?

Exercice 53 (X)* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. On suppose que les coefficients diagonaux de A sont tous nuls et que les coefficients en dehors de la diagonale sont dans $\{-1, 1\}$. Montrer que A est inversible.

Exercice 54 (Centrale) On s'intéresse aux matrices A de coefficients a_{ij} entiers, de diagonale nulle et dont les termes non diagonaux valent 1 ou -1 . On note la A_0 matrice de ce type dont tous les termes non diagonaux valent 1.

- Calculer $\det(A_0)$. En déduire dans le cas général que si n est pair, alors A est inversible (on pourra raisonner modulo 2). Que dire du rang de A si n est impair ?

2. Soit un tas de n cailloux tel que, si l'on en retire un, on puisse toujours faire deux tas de même masse avec les $n - 1$ cailloux restants : montrer que n est impair.
3. Montrer que, pour n impair, il existe un nombre fini de masses m_1, \dots, m_n (à une constante multiplicative près) qui permettent de réaliser la condition précédente.
4. On impose désormais que, pour $n = 2k + 1$ et quel que soit le caillou que l'on retire, il soit possible de former deux tas de k cailloux de même masse. Montrer que tous les cailloux ont la même masse.

Exercice 55 (*X*) Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ distincts. Calculer le déterminant de $\left(\frac{1}{a_i - b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Exercice 56 * Soient A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe P dans $Gl_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On veut montrer qu'il existe $Q \in Gl_n(\mathbb{R})$ telle que $B = Q^{-1}AQ$.

1. Ecrivons $P = R + iS$ avec $(R, S) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $RB = AR$ et $SB = AS$.
2. En déduire que : $\forall \lambda \in \mathbb{R} (R + \lambda S)B = A(R + \lambda S)$. Conclure.

Exercice 57 (*Centrale-Mines-X*)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, calculer $\text{rg}(\text{Com}M)$ en fonction de $\text{rg}M$.
2. Montrer que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, $\text{Com}(AB) = (\text{Com}B)(\text{Com}A)$. On pourra commencer par le montrer pour des matrices inversibles et traiter le cas général plus tard.
3. L'application Com est-elle injective ?
4. Quelle est son image dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Même question sur \mathbb{R} , puis sur \mathbb{Q} ?

Exercice 58 (*X-Mines*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'équation $M = \text{Com}(M)$.

Exercice 59 (*X*) Soient $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$ avec $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 1$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. On suppose que la suite de terme général $u_p = \sum_{j=1}^n a_j \cos(\pi p \theta_j)$ tend vers 0. Montrer : $\forall j \in \{1, \dots, n\}, a_j = 0$.

Exercice 60 (*P*) Soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, vérifiant pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2$, $A_{i,j} \geq 0$. Pour $1 \leq i \leq m$, on définit $d_i = \text{pgcd} \{k \in \mathbb{N}^*, (A^k)_{i,i} > 0\}$.

1. On suppose : $\exists k \in \mathbb{N}, \forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2, (A^k)_{i,j} > 0$. Montrer que $d_1 = 1$.
2. On suppose : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2, \exists k \in \mathbb{N}, (A^k)_{i,j} > 0$. Montrer que les d_i sont tous égaux.
3. Avec la même hypothèse, montrer la réciproque de la première question.

Exercice 61 (*X*) Soit V un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments sont de rang inférieur ou égal à r . Montrer que $\dim V \leq n \times r$.