MP*2 LLG
2023/2024

Feuille d'exercices : Intégrale sur un intervalle quelconque

Exercice 1 *(CCINP-Mines-Centrale)* Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{\ln x}{(1+x)(2+x)}$ sur $]0,\infty[$.
2. $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x-1}}$ sur $]1,\infty[$.
3. $x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
4. $t \mapsto \dfrac{\mathrm{ch} t - \cos t}{t^{\frac{5}{2}}}$ sur $]0,1[$.
5. $t \mapsto \dfrac{\sin t}{\ln t}$ sur $[a,\infty[$.
6. $t \mapsto \dfrac{\ln t - \ln(1-\mathrm{e}^{-t})}{t}\mathrm{e}^{-\alpha t}$ sur $]0,+\infty[$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
7. $t \mapsto \cos(t^2+at+b)$ sur $[0,\infty[$ pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2 *(CCPINP)* On définit $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x^\beta)}$ et $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$.

1. Trouver les conditions sur (α,β) telles que I_1 soit définie.
2. Même question avec I_2.
3. Tracer dans un repère (α en abcisses et β en ordonnées) les couples (α,β) qui rendent I_1 et I_2 définies.

Exercice 3 *(Mines)* Existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 *(Mines-Centrale)* Vérifier l'existence et calculer la valeur des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.
3. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}}{x}\,\mathrm{d}x$.
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right)\right)\mathrm{d}t$.
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 5

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que pour tout $t \geqslant 0$, $e^{-t^2} \leqslant \dfrac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}$.
2. Montrer que pour tout $t \in [0,\sqrt{n}]$ $\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n} = \sqrt{n}W_{2n-2}$ et $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n = \sqrt{n}W_{2n+1}$, avec (W_n) les intégrales de Wallis.
4. Après avoir démontré que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, calculer $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6 *(ENTPE - EIVP)* Montrer que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\sin(xt)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t > 0$.

Exercice 7 *(Mines-Centrale)**

1. Existence et calcul, pour $n \in \mathbb{N}$ de $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$ (on pourra calculer la différence de deux termes consécutifs).
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n - I_n = 0$.
3. En déduire $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8 *(X-Mines) **

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec f' intégrable. Montrer que $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge.

2. Nature de $\sum \frac{\sin\sqrt{n}}{n}$, $\sum \frac{\cos\sqrt{n}}{n}$, $\sum \frac{\cos(\ln n)}{n}$, $\sum \frac{\cos(\ln n)}{\ln n}$?

Exercice 9 *(Mines)*

1. Montrer l'existence de $I = \int_0^{+\infty} e^{it^2}\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que $\int_x^{+\infty} e^{it^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \frac{ie^{ix^2}}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Exercice 10 *(Mines)* Soit $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$. Justifier que cette fonction est bien définie et donner son intervalle de définition. Y est-elle intégrable ?

Exercice 11 *(Mines)* *

1. Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}^+$ décroissante et intégrable.
   Étudier la limite éventuelle de $x \mapsto x\,f(x)$ quand $x \to 0^+$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ décroissante et intégrable.
   Étudier la limite éventuelle de $x \mapsto x\,f(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 12 *(Mines)* Soient $f :]0,1] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$, ℓ_1 et ℓ_2 deux réels tels que $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \ell_1$ et $x\,f'(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \ell_2$. Que vaut ℓ_2 ?

Exercice 13 *(Mines)* Soient $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ continue et $s_0 \in \mathbb{R}$ tels que $\int_0^{+\infty} e^{-s_0 t} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $s \geqslant s_0$.

Exercice 14 *(SR)* Soit $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ continue tel que $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$. On note $g : y \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_y^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x \in [0,+\infty]$.
2. On suppose dans la suite que f est décroissante. Montrer qu'il existe un unique $m > 0$ tel que $\int_0^m f(x)dx = \frac{1}{2}$.
3. Montrer que $\int\limits_0^{+\infty} xf(x)dx \geqslant m$.
4. Peut-on avoir égalité ?

Exercice 15 *(SR)* On considère $0 < a \leqslant b$.

1. Montrer les inégalités suivantes et caractériser les cas d'égalité : $1 \leqslant \frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \leqslant \sqrt{\frac{a}{b}}$, puis $0 \leqslant \frac{\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}} \leqslant \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^2$.
2. On considère $I(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}$. Calculer $I(a,a)$ et montrer que
$$I(a,b) = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right).$$
3. On définit deux suites réelles $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ par $a_0 = a, b_0 = b$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Étudier la convergence de $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$. En déduire $I(a,b)$.

Exercice 16 *(Ulm-Centrale-Mines)** Soit $(a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\int_1^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge.

1. Justifier l'existence de $\int_\epsilon^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t$, pour $\epsilon > 0$.
2. Calculer $l = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge et en calculer la valeur.
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$ convergent et calculer leur valeur.
5. Soient $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $a \neq b$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$.
6. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(2x)-\arctan(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.
7. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{\ln t}\,\mathrm{d}t = -\ln 2$.

Exercice 17 *(Mines)* Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, admettant une limite ℓ en $-\infty$ et telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge. Montrer l'existence et calculer pour $a<b$ l'intégrale $I(a,b) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(t+a)-f(t+b)\right)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 18 *(Mines-Centrale)* On note $E = \left\{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}),\ f^2 \text{ et } f''^2 \text{ sont } \mathbb{R}_+-\text{intégrables}\right\}$. Soit $f \in E$.
1. * Montrer que ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. * En déduire que f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)f'(x) = 0$.
3. * Montrer que $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x))^2 = 0$ et que $\lim\limits_{x\to\infty} (f'(x))^2 = 0$.
4. * Dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et telle que f^2 et f''^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}$, montrer que f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\|f'\|_2^2 \leqslant \|f\|_2\|f''\|_2$.
5. Pour tout $g \in E$, on définit $J(g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (g^2 - g'^2 + g''^2)$. Montrer en le déterminant que J admet un minimum sur E. *On pourra utiliser que* $(g+g'+g'')^2 = (g^2-g'^2+g''^2) + 2(g+g')(g'+g'')$.
6. Soit $f \in E$. Montrer que $\|f'\|_2^2 \leqslant 2\|f\|_2\|f''\|_2$. *On pourra utiliser* $x \mapsto f(\mu x)$.

Exercice 19 *(Mines)*
1. On note L^2 le sous-espace des f de $C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que L^2 est un sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$.
2. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ tel que f, f', f'' appartiennent à L^2. Montrer que f' et f ont une limite réelle que l'on précisera en $+\infty$.
3. Avec les notations de (b), montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(f''^2 - 4f'^2 + 16f^2\right) \geqslant 0$ et caractériser le cas d'égalité.

Exercice 20 *(X)* Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) \neq 0$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$. Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln(|P(re^{it})|)\,\mathrm{d}t$, puis la calculer en fonction de $P(0)$ et des racines de P de module strictement inférieur à r.

Exercice 21 *(Mines-X)* Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, avec $\deg(P) \leqslant \deg(Q) - 2$. On suppose que Q n'a pas de racines réelles ; on notera Z l'ensemble de ses racines.

1. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Montrer l'existence et donner la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t-z)^k}$.
2. Montrer l'existence de la limite quand r tend vers l'infini de $\displaystyle\int_{-r}^{r} \frac{\mathrm{d}t}{t-z}$, et en donner la valeur.
3. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\,\mathrm{d}t$ converge et que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\,\mathrm{d}t = i\pi \sum_{z \in Z} \epsilon(z)\alpha(z),$$
avec $\epsilon(z)$ le signe de la partie imaginaire de z, et $\alpha(z)$ le coefficient devant $\dfrac{1}{X-z}$ dans la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P}{Q}$.

4. Dans le cas où P et Q sont des polynômes des $\mathbb{R}[X]$, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\, \mathrm{d}t = 2i\pi \sum_{z \in Z_+} \alpha(z),$$

où Z_+ est l'ensemble des racines de Q dans le demi-plan supérieur de $\mathbb{C}$.

5. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t(t+1)}{(t^2+1)^2}\, \mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\, \mathrm{d}t$.

Exercice 22 *(X)* Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge et telle que $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+1} f'^2$ est bornée. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Exercice 23 *(Centrale)* Équivalent en 0 et en $+\infty$ de $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t$.

Exercice 24 *(Paris)* Déterminer la limite de $\displaystyle\frac{1}{A}\int_1^A A^{1/x}\, \mathrm{d}x$ lorsque A tend vers $+\infty$.

Exercice 25 *(Lyon)* Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ strictement décroissante telle que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x) - f(x+1)}{f(x)}\, \mathrm{d}x = +\infty$.

Exercice 26 *(Centrale)**

1. Soit E l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ intégrables, muni de la norme $\|.\|_1$.

   Soit $a > 0$. Pour $f \in E$, on définit $\phi(f) = g$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-ax} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{at} f(t)\, \mathrm{d}t$. Montrer que g est intégrable.

   Puis montrer que ϕ est un endormophisme continu de E *i.e* : $\exists M > 0,\ \forall f \in E,\ \|\phi(f)\|_1 \leqslant M\|f\|_1$.

2. On se place maintenant sur l'espace F des fonctions de carré intégrable muni de la norme $\|.\|_2$. Étudier la même question dans ce cas.

Exercice 27 *(Paris)* Soit f une fonction continue et de carré intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \mapsto e^{-x} \displaystyle\int_0^x f(t)\, e^t\, \mathrm{d}t$.

Exercice 28 *(Paris)* Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ de carré intégrable et $g : x \mapsto f(x) - 2e^{-x} \displaystyle\int_0^x e^t f(t) ț$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g^2 = \int_0^{+\infty} f^2$.

Exercice 29 *(Centrale-X)* *

1. Soit E l'espace vectoriel constitué des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de carré intégrable que l'on munit de la norme définie par $\|f\|_2 = \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2\right)^{1/2}$.

   Pour $f \in E$, on pose $\phi(f) = g$, où $g(x) = \displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$ si $x > 0$ et $g(0) = f(0)$. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme ϕ de E.

2. Déterminer $\displaystyle\sup_{f \in E \setminus \{0\}} \frac{\|\phi(f)\|}{\|f\|}$.

Exercice 30 *(Mines)* Soit $f : [1, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que f'^2 est intégrable. Montrer que l'application $t \in [1, +\infty[\mapsto \displaystyle\frac{f(t)^2}{t^2}$ est intégrable.

Exercice 31 *(ENS)* Sot $p > 1$.

1. Démontrer l'iéngalité de Hölder.
2. Soit f continue sur $\mathbb{R}_+$, positive, telle que f^p soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose $F : x > 0 \mapsto \displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$. Montrer que F^p est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} F^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{+\infty} f^p$.